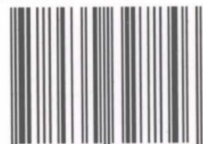
（解析数论研究专著）

Barban-Davenport-Halberstam 均值和

刘弘泉 著

哈爾濱工業大學出版社

责任编辑 翟新烨
封面设计 张孝东


ISBN 978-7-5603-2784-6
定价 40.00元

解析数论研究专著

Barban-Davenport-Halberstam 均值和

刘弘泉 著

图书在版编目(CIP)数据

Barban-Davenport-Halberstam 均值和/刘弘泉著.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-5603-2784-6

Ⅰ.B… Ⅱ.刘… Ⅲ.数论-研究 Ⅳ.0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 157443 号

责任编辑 翟新烨
封面设计 张孝东
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 19.5 字数 227 千字
版 次 2008 年 11 月第 1 版 2008 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2784-6
印 数 1~1 000 册
定 价 40.00 元

前　　言

Barban-Davenport-Halberstam 均值和（以下简称“BDH 均值和”）是涉及大筛法应用和算术级数中素数分布的一个重要均值和，最初是由前苏联数论学家 M.B.Barban、英国数论学家 H.Davenport 及 H.Halberstam 独立地在 20 世纪 60 年代加入研究的，Davenport 在其名著《Multiplicative Number Theory》（见［D］）的 § 29 中专论此和，而英国数论学家 C.Hooley 则从 1975 年至今已在“On the Barban-Davenport-Halberstam theorem”的大标题下共发表了 17 篇论文。应用大筛法和 Siegel 定理，Barban、Davenport、Halberstam 及 Gallagher 已获得了 BDH 均值和适当的上界估计，Montgomery 与 Hooley 则分别在 1970 年和 1975 年用不同的方法得到了 BDH 均值和 $S(Q,x)$ 适当的渐近公式（此处“适当的”一词意指 Q 与 x 满足一由 Siegel 定理所界定的不等式）。

我在 1993 年发表了一篇关于如何获求某些“BDH 型均值和”适当下界估计的论文（见［L2］），特别地由该文结果可导出 BDH 均值和已知的适当下界估计。该文的方法是全新的，因为我没有像通常那样将 BDH 均值和加以平方展开，而是发现了 BDH 均值和同圆法（“圆法”通常用来研究加法数论的问题！）中间内在而微妙的联系，由此只需将一个显然的恒等式中的积分按圆法中的“优弧”和“劣弧”加以分部处理，再经过一些求和与积分的变化，即会使问题中的“BDH 型均值和”显现出来，从而获得一个适当的下界估计。受到陈景润和潘承洞在关于 Goldbach 数例外集工作中一引进处理方法的启发，在文［L2］中新方法的基础上，我又

在1995年发表了一篇关于BDH均值和下界估计的论文（见文[L3]），在其中我突破了由使用Siegel定理所带来的传统限制条件，该文的结果立即得到了国外同行高度评价（J.B.Friedlander的评价可见《Mathematical Review》，1996（f），11125）。将圆法的思想同大筛法乃至L-函数零点密度估计方法相结合后产生的威力，已在[L3]的工作中得到体现。值得指出的是，虽然后来Hooley采用其他方法也成功地突破了由使用Siegel定理所带来的传统限制条件，且能改进我所获得的下界估计的系数，但他却无法突破我在[L3]中获得的一个优于素数定理余项形式的结果（较为宽泛的Q与x的限制条件（见本书附录三））。最近，在一篇即将发表的论文中（见[L6]），我在将BDH均值和平方展开的基础上（这又回到了Montgomery方法和Hooley方法的出发点），综合运用圆法与L-函数零点密度估计方法，在突破了由使用Siegel定理所带来的传统限制条件的情况下，经过很复杂的求和与积分的变幻，获得了BDH均值和的一个显含L-函数例外零点的“拟渐近公式”，由此立即可得两个重要推论：（i）欲获得BDH均值和在突破了由使用Siegel定理所带来的传统限制条件的情况下的标准形式的上界估计，就必须对L-函数可能出现的例外实零点的上界做适当假设（这实际已解决了自Gallagher 1967年的工作以来关于BDH均值和上界估计的一个长期悬而未决的问题；这是迄今为止Hooley等人的方法无论如何所达不到的）；（ii）在关于Q与x的同类限制条件下，改进了Hooley在其2000年的文章[H7]中所获得的关于BDH均值和的下界估计（见附录三）。文[L6]中的结果亦是可以不依赖于Siegel定理的。

出版本书的目的便是向国内外数学界介绍我在文[L3]和文[L6]中所获得的处于世界前沿水平的研究成果，并在此同时向广大数论爱好者展示解析数论中一些常用的技巧和方法。第一章

和第二章是本书的基础，其中分别用细腻的笔法讲解了 L – 函数（包括 zeta 函数）的基础理论、大筛法的基本理论及其如何用于 L – 函数零点密度估计的推导。本书的特点之一是弃用了“Siegel 定理”这个不实效的结果，因为我已发现在推导该定理时存在严重逻辑错误。由著名数学家潘承洞和潘承彪所著的《解析数论基础》一书（[PP]），无论从深度和广度上都已超过了 Davenport 的书，近 20 年来的确使国内大量年轻学者受益匪浅，但其中也有的处理含糊不清，为此我在处理相关内容时进行了若干更正。其一，涉及 L – 函数的估阶，我在定理 1.3.6(i)的(b)步骤中所构造的那个函数 $f(s)$ 确为解析函数（这是应用最大模原理所必需的），而且我在那里接下去所做的技术讨论也是[PP]中所没有的。其二，涉及 L – 函数在“$\sigma = 1$”附近的“无对数因子型”零点密度估计，我在定理 2.5.1 中只能获得带有“loglog”型因子的零点密度估计，这还是将[PP]中相关错误的处理加以更正并加细讨论后才得到的，因为我发现在 Jutila 于 1977 年发表的那篇论文中，它仅仅是认为用其方法可获得“无对数因子型”零点密度估计而并未详细写出（[PP]中正是用了 Jutila 所建议的方法）。是不是其他获得 L – 函数“无对数因子型”零点密度估计的方法也经不起推敲？我经研究发现果真如此，于是 Montgomery 和 Vaughan（还有潘承洞、陈景润、刘健民、李红泽）等人关于 Goldbach 例外集的重要工作就都达不到了。值得指出的是，涉及第三章中的结果，实际上只需要 L – 函数的带有“log”较小幂次型因子的零点密度估计就足够了。本书第三章则系统地阐述了我关于 BDH 均值和的两项成果，其中的论证在本书范围内是“自给自足”的，追求新颖性（例如，我在 §3.2 中设计了一种初等的处理方法，以此避免使用要用实分析 L^2 – 理论中的 Plancherel 定理才能证明的“Gallagher 引理”），且对论文中的结果略有改进（例如，定理 3.2.1 已将文[L3]

中的系数由“1/4 改进为 1/2”，而与文[L6]的主要结果相比，在定理 3.3.1 的表述中，则添加了因不使用“Siegel 定理”所产生出来的一个额外非负求和）。本书中没有对任何推广形式的“BDH 型均值和”加以论述，有兴趣的读者可参阅我已发表的二篇论文（见[L2]，[L4]）。本书 § 3.4 中提到的那个均值和，亦是很值得研究的，对此有兴趣的年轻学者无妨深入地探讨一下。

解析数论在我国是强项，自华罗庚、闵嗣鹤、王元、陈景润、潘承洞等以来已有几代学者在从事相关一些方向的研究，目前可以说是方兴未艾，年轻人才辈出，都活跃在国际研究前沿。因此，我希望本书的出版能对同行学者具有一定的启迪意义。追求数学推理的严密性实在是数学家最重要的素质，这不仅应体现在若干带刺激性的计算或证明中，更应体现在理解一些数学中最基本但却较为乏味的东西上，对此恐怕只有那些仔细品味本书中细致推理的读者才能体会到我的良苦用心。阅读本书读者须具备初等数论、数学分析以及复变函数的大量知识。

哈工大数学系吴从炘、李容录、唐余勇三位教授，以及哈工大出版社黄菊英总编、刘培杰先生，皆对本书的出版给予支持与鼓励，我在此对他们表示衷心的感谢。本书是由哈工大校科研专著出版基金资助出版的。

刘弘泉

2008 年 10 月于哈工大

常用的一些记号

1°. Res 和 Ims 分别为复数 s 的实部与虚部，即 $s = \text{Re}s + i\text{Im}s$，$i = \sqrt{-1}$，见 §1.1。

2°. $\Gamma(s)$ 为 Γ - 函数，当 $\text{Re}s > 0$ 时，它定义为

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt。$$

见 §1.1。

3°. (n,q) 与 $[n,q]$ 分别表示全不为零的整数 n 与 q 的正的最大公因子与最小公倍数. 当 $n = 0, q \neq 0$ 时，定义 $(n,q) = |q|$，其他情形没有定义，当 $nq \neq 0$ 且 $(n,q) = 1$ 时称 n 与 q 互素。见 §1.2。

4°. $a \equiv b \pmod q$ 或 $q \mid (a-b)$ 表示 $q \neq 0$ 且 $(a-b)$ 为 q 的整数倍，见 §1.2。

5°. p 表示素数，即仅以 1 和它自身为因子的正整数。规定 1 不是素数。见 §1.2。

6°. $\varphi(q)$ 为 Euler 函数，即不超过 q 且与 q 互素的正整数个数，

$$\varphi(q) = q \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)。$$

见 §1.2。

7°. χ 或 $\chi(n)$ 为特征函数，它是完全积性的周期函数。设 q 为正整数，则模 q 的特征 $\chi(n)$ 的周期为 q。当 $(n,q) > 1$ 时 $\chi(n) = 0$，当 $(n,q) = 1$ 时，$|\chi(n)| = 1$，并规定 $\chi(0) = 0$。见 §1.2。

8°. $e(\xi) = \exp(2\pi i\xi) = e^{2\pi i\xi} = \cos(2\pi\xi) + i\sin(2\pi\xi)$, π 为圆周率, $i = \sqrt{-1}$。见 §1.2。

9°. $\tau(\chi) = \sum_{1\leqslant n\leqslant q}\chi(n)e(n/q)$ 为 Gauss 和,其中 χ 为模 q 的特征,见 §1.2。

10°. χ_q^0(或 χ_0,若不致引起混淆)为模 q 的主特征,即当 $(n,q) = 1$ 且 $n \neq 0$ 时值恒为 1 的特征。见 §1.2。

11°. $c_q(n) = \tau(\chi_q^0) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant q\\(n,q)=1}} e\left(\frac{n}{q}\right)$ 为 Ramanujan 和,其值为 $\frac{\varphi(q)\mu(q/(n,q))}{\varphi(q/(n,q))}$,见 §1.2。

12°. $\sum_{\chi \bmod q}$ 表示求和通过模 q 所有的特征,见 §1.2。

13°. $\mu(q)$ 为 Möbius 函数, $\mu(1) = 1$,当 q 为 r 个不同素数之积时, $\mu(q) = (-1)^r$,对其他情形 $\mu(q) = 0$。见 §1.2。

14°. $L(s,\chi)$ 为 L-函数, χ 为模 q 的任一特征, s 为复数。当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时,它定义为

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

见 §1.3。

15°. $\xi(s,\chi)$ 为一个整函数,见 §1.3。

16°. $\zeta(s)$ 为 ζ-函数, s 为复数。当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时,它定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

见 §1.3。

17°. $\xi(s)$ 为一个整函数,见 §1.3。

18°. $A = O(B)$ 或 $A \ll B$ 表示 $B \geqslant 0$ 且 $|A| \leqslant CB$,其中 C 是一个相对而言可以忽略不计的正常数,见 §1.3。

19°. $\tau(n)$ 为除数函数,即正整数 n 的不同的因子的个数,见

§1.4。

20°. $\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数,当 n 为素数 p 的正整数次幂时,$\Lambda(n)=\log p$,否则 $\Lambda(n)=0$。见 §1.4。

21°. $N(T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 的满足条件 $|t|\leqslant T$ 的非平凡零点 $s=\sigma+it$ 的数目,其中零点是几阶的就重复计数几次,见 §1.5。

22°. $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足条件 $|t|\leqslant T$ 的非平零点 $s=\sigma+it$ 的数目,其中零点是几阶的就重复计数几次,见 §1.5。

23°. $\pi(x;q,a)$ 表示算术级数 $\{a+nq\mid n=0,1,2\cdots\}$ 中不超过 x 的不同素数的个数,见 §1.6。

24°. $\psi(x;q,a)=\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a(\bmod q)}}\Lambda(n)$,见 §1.6。

25°. $\psi(x,\chi)=\sum\limits_{n\leqslant x}\chi(n)\Lambda(n)$,其中 χ 为一特征,见 §1.6。

26°. $\psi(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n)$,见 §1.6。

27°. $\pi(x)$ 表示不超过 x 的不同素数的个数,见 §1.6。

28°. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,见 §1.6。

29°. $\|x\|$,当 x 为 N 维向量 $(x_1,\cdots,x_N)$ 时 ($x_1,\cdots,x_N$ 为复数),表示向量的范数,即

$$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_N|^2},$$

见 §2.1。

30°. $\|x\|$,当 x 为实数时,表示 x 到距之最近的整数之间的距离,即

$$\|x\|=\min_{n\in Z}|x-n|,$$

其中 Z 表示全体整数的集合,见 §2.1。

31°. R^1 表示实直线 $(-\infty,\infty)$,见 §2.2。

32°. $\hat{f}$ 为函数 f 的 Fourier 变换。当 f 在 R^1 上绝对可积时,

$$\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e(ux)\mathrm{d}u。$$

见 §2.2。

33°. $\tau_a(r) = \prod_{p|r}(1-p^a)^{-1}$,其中 $a = -\frac{1}{3}$,见 §2.3。

34°. $k(n) = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$,见 §2.4。

35°. γ 为 Euler 常数,$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n} - \log N\right)$,见 §2.3。

36°. $N(\alpha, T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 的满足 $\rho = \beta + it$, $|t| \leqslant T$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ 的零点 ρ 的个数,其中一个零点是几阶的就重复计数几次,见 §2.4。

37°. $\sum_{\chi \bmod q}^{*}$ 表示求和通过模 q 的所有原特征 χ,见 §2.4。

38°. $N(\alpha, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = \beta + it$, $|t| \leqslant T$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ 的零点 ρ 的个数,其中一个零点是几阶的就重复计数几次,见 §2.5。

39°. $S(Q, x) = \sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\left(\psi(x;q,a) - \frac{1}{\varphi(q)}\psi(x,\chi_q^0)\right)^2$ 为 BDH 均值和,其中 $x \geqslant Q \geqslant 3$,见 §3.1。

40°.
$$T(Q, x) = \sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\left|\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\mathrm{e}\left(\frac{na}{q}\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\right|^2,$$
见 §3.4。

41°. $\tau_Q(r) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant Q\\n|r}}1$,见 §3.5.

目　　录

第一章

L 函数

特征及 L 函数是为了研究算术级数中素数的分布而引入的。

§1.1 Γ 函数

我们用 $\mathrm{Re}s$ 代表复数 s 的实部。对任意正实数 t，t^{s-1} 定义为

$$\exp((s-1)\log t),$$

这里 $\log z$ 取对数的主分支，即可把 z 取值于整个复 z 平面上去掉了原点及负实轴后得到的开连通集 Ω，且 $\log 1 = 0$（这时 $\log z$ 为 Ω 上的解析函数）。$t>0$，t 固定时，t^{s-1} 则为全 s 平面上处处解析的函数，即整函数。当 $\mathrm{Re}s>0$ 时，Γ 函数 $\Gamma(s)$ 定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t,$$

这里积分的收敛应理解为两个极限

$$\int_0^1 e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t \text{ 与} \int_1^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\int_1^x e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$$

同时存在，而有限区间上复值函数的积分则应定义为先将被积函数的实部与虚部分别积分，然后将实部积分的值加上虚部积分的值乘 i。为研究 $\Gamma(s)$ 的性质，我们需要证明几个引理。

引理1.1.1 设 s 为一个复变数，$f(t,s)$ 当 $0<t\leqslant 1$ 时为关于 s 的在 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数，当 $1\leqslant t<\infty$ 时为关于 s 的整函数。而且，对于任意给定的正数 δ 及 D，$|s|\leqslant D$，设 $f(t,s)$ 关

于 t 在包含于区间$[\delta,\infty)$的任何有限的闭区间上对 s 一致连续。我们有

(i) 若对任取 $d>0$，当 $0<t\leqslant 1, d\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 3d$ 时，$f(t,s)=O(G(t))$，且

$$\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t$$

存在，那么当 $\mathrm{Re}s>0$ 时，极限

$$F_1(s)=\lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t$$

存在，且表示 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数。

(ii) 若设对任取 $d>0$，当 $1\leqslant t<\infty, -d\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant d$ 时，就有$f(t,s)=O(K(t))$，且

$$\int_1^\infty K(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\int_1^x K(t)\mathrm{d}t$$

存在，那么对任意复数 s，极限

$$F_2(s)=\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t,s)\mathrm{d}t=\int_1^\infty f(t,s)\mathrm{d}t$$

存在，且代表一个整函数。

因此，若(i)与(ii)中的假设条件都成立，当 $\mathrm{Re}s>0$ 时定义

$$F(s)=\int_0^\infty f(t,s)\mathrm{d}t=F_1(s)+F_2(s),$$

则函数 $F(s)$ 为 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数。

证明： (i) 设 s_0 为任一个满足 $\mathrm{Re}s_0>0$ 的复数。令 $d=\frac{1}{2}\mathrm{Re}s_0$。用 C 代表圆周$\{z\mid |z-s_0|=d\}$。当$|s-s_0|\leqslant d$ 时，我们有 $d\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 3d$。设 M 为一个充分大的自然数。当$|s-s_0|<\frac{d}{2}$ 时，令

$$f_M(t,s)=\sum_{n=0}^{M}a_n(t,s_0)(s-s_0)^n,$$

$$a_n(t,s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{(z-s_0)^{n+1}}\mathrm{d}z。$$

则由假设的条件可得

$$\begin{aligned}
f_M(t,s) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{z-s_0}\left(\sum_{n=0}^{M}\left(\frac{s-s_0}{z-s_0}\right)^n\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{z-s}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{z-s}\left(\frac{s-s_0}{z-s_0}\right)^{M+1}\mathrm{d}z \\
&= f(t,s) + O(2^{-M}G(t))。
\end{aligned}$$

对任意的 $\delta > 0$, $a_n(t,s_0)$ 为 $[\delta,1]$ 上的连续函数。所以

$$\begin{aligned}
\int_\delta^1 f_M(t,s)\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{M}(s-s_0)^n\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t \\
&= \int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t + O(2^{-M}\int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t)。
\end{aligned}$$

令 $M \to \infty$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t = \int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t。\tag{1}$$

由假设可得估计

$$|a_n(t,s_0)| = O(d^{-n}G(t)),\tag{2}$$

及

$$\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t < \infty,$$

故可知

$$\int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t$$

存在,且

$$\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t = \int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t + O\left(\int_0^\delta d^{-n}G(t)\mathrm{d}t\right)。$$

所以由(1) 可得

$$\int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n\left(\int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t\right) + O\left(\int_0^\delta G(t)\mathrm{d}t\right)。$$

令 $\delta \to 0$,可得

$$\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n\left(\int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t\right)。$$

由(2),这个等式就说明$\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t$ 是$|s-s_0|<d$ 上的解析函数。所以

$$F_1(s) = \int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t$$

存在且代表$|s-s_0|<d$ 中的解析函数。由于 s_0 是任意的,$\mathrm{Re}s_0>0$,所以(i) 成立。类似地可证明(ii)。**证毕**。

引理 1.1.2　(i) 当 $0 \leqslant x < 1$ 时,$\log(1-x) \leqslant -x$。

(ii) 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$x + \log(1-x) + x^2 \geqslant 0$。

证明:(i) 令 $f_1(x) = \log(1-x) + x, 0 \leqslant x \leqslant x_1 < 1$。则

$$f'_1(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leqslant 0。$$

所以 $f_1(x)$ 为下降函数。由于 $f_1(0)=0$,可知对每个 $x \in [0,x_1]$ 成立着$f_1(x) \leqslant 0$。

(ii) 令 $f_2(x) = x + \log(1-x) + x^2, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$,则

$$f'_2(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + 2x = x\left(2 - \frac{1}{1-x}\right) \geqslant 0,$$

所以 $f_2(x)$ 为上升函数。由于 $f_2(0)=0$,可知对每个 $x \in [0,\frac{1}{2}]$ 成立有$f_2(x) \geqslant 0$。**证毕**。

引理 1.1.3(分部求和)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有连续一阶导函数 $f'(x)$,C_m 为任意复数,

$$C(x) = \sum_{a<m\leqslant x} C_m, a \leqslant x \leqslant b,$$

则

$$\sum_{a<n\leqslant b} C_n f(n) = -\int_a^b C(x)f'(x)\mathrm{d}x + C(b)f(b)。$$

证明:我们有

$$\sum_{a<n\leqslant b} C_n f(n) = \sum_{a<n\leqslant b} (C(n) - C(n-1))f(n)$$
$$= \sum_{a<n\leqslant b} C(n)f(n) - \sum_{a<n\leqslant b-1} C(n)f(n+1)$$
$$= C(b)f([b]) + \sum_{a<n\leqslant b-1} C(n)(f(n) - f(n+1)); \quad (3)$$

这里 $[b]$ 为不超过 b 的最大整数。先设 $[b] \geqslant [a]+2$。对每个整数 $n, n \in [[a+1],[b]-1]$,将区间 $[n, n+1]$ 任意分成 m 个小段,即

$$n = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = n+1,$$

并在 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任选一点 ξ_i,作和

$$\sum_{i=0}^{m-1} C(\xi_i)f'(\xi_i)\Delta x_i = C(n)\left(\sum_{i=0}^{m-1} f'(\xi_i)\Delta x_i\right) + O(|\widetilde{C}(n)| \cdot K \cdot \Delta x_{m-1}), \quad (4)$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $|\widetilde{C}(n)| = \max(|C(n)|, |C(n+1)|)$, $K = \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} |f'(x)| < \infty$。设当 $m \to \infty$ 时, $\max_{1\leqslant i\leqslant m-1} \Delta x_i \to 0$。在(3)中令 $m \to \infty$,则由定义可得

$$\int_n^{n+1} C(x)f'(x)\mathrm{d}x = C(n)\left(\int_n^{n+1} f'(x)\mathrm{d}x\right) = (f(n+1) - f(n))C(n)。 \quad (5)$$

类似可证

$$\int_a^{[a+1]} C(x)f'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{[b]}^{b} C(x)f'(x)\mathrm{d}x = C(b)(f(b) - f([b]))。 \quad (6)$$

因此,由(3)可得

$$\sum_{a<n\leqslant b} C_n f(n) = C(b)f([b]) + \sum_{[a]+1\leqslant n\leqslant [b]-1} C(n)(f(n) - f(n+1))$$

$$= C(b)f([b]) - \sum_{[a]+1\leqslant n\leqslant[b]-1}\int_n^{n+1}C(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= C(b)f([b]) - \int_{[a]+1}^{[b]}C(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_a^b C(x)f'(x)\mathrm{d}x + C(b)f(b),$$

引理成立。当$[b]=[a]$或$[b]=[a]+1$,利用(3)与(6)可立即验证本引理。**证毕**。

推论 1.1.4 设$f(x)$在$[a,b]$上连续的导函数,$\psi(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$,则

$$\sum_{a<n\leqslant b}f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b\psi(x)f'(x)\mathrm{d}x + \psi(a)f(a) - \psi(b)f(b)。$$

特别地,由此我们还得知$\psi(x)f'(x)$在$[a,b]$上可积(事实上,由$\psi(x)$有界且仅在整点处不连续,故$\psi(x)f'(x)$是$[a,b]$上 Riemann 可积的,这可与(5)类似地直接证明)。

证明:在引理 1.1.3 中取$C_n=1$,则

$$\sum_{a<n\leqslant b}f(n) = \int_a^b([x]-[a])f'(x)\mathrm{d}x + ([b]-[a])f(b)。$$

因为$[x]-[a]=x-a+\psi(a)-\psi(x)$,所以

$$\int_a^b([x]-[a])f'(x)\mathrm{d}x = f(b)(b-a) + \psi(a)(f(b) - f(a)) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f'(x)\psi(x)\mathrm{d}x,$$

又

$$([b]-[a])f(b) = (b-a)f(b) + (\psi(a)-\psi(b))f(b),$$

合并各项即可知本推论成立。**证毕**。

关于$\Gamma(s)$,我们有

定理 1.1.5 (i) 函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

表示 Re$s > 0$ 上的一个解析函数。

(ii) $\Gamma(s)$ 可解析开拓至全 s 平面上除去原点及负整数外的开连通集 Ω_1 上，并满足关系式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$。$\Gamma(s)$ 仅在 $s = 0, -1, -2, \cdots$ 处有单重极点，相应的残数都是 1。

(iii) $\Gamma(s)$ 没有零点。当 s 位于复 s 平面上去掉原点及负实轴的开集 Ω_2 中时，

$$\Gamma(s) = \exp\left(\left(s + \frac{1}{2}\right) \log(s+1) - s - \log s + \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2} \mathrm{d}x - \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(s+x)^2} \mathrm{d}x \right),$$

其中 $\sigma(x) = \int_0^x \psi(u)\mathrm{d}u, \psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$。

(iv) 当 $s = \tau + it \in \Omega_2$，$\tau$ 与 t 为实数，且 $|t| \geqslant 1$ 时，

$$|\Gamma(s)| = c|t|^{\tau - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \left(1 + O\left(\frac{(|\tau|+1)^3}{|t|}\right)\right),$$

其中 $c = \exp\left(1 + \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2} \mathrm{d}x\right)$。

(v) 当 $s \in \Omega_2$ 时，

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2\int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)\mathrm{d}x}{(s+x)^3}。$$

特别地，当 $s = \tau + it, |t| \geqslant c_1 > 0$，或 $0 < c_2 \leqslant |\tau| \leqslant c_3 < 1$，或 $\tau \geqslant \frac{1}{2}$（$c_i$ 为绝对常数）时

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) + O\left(\frac{|\tau|+1}{|t|+1}\right)。$$

证明：(i) 在引理 1.1.1 中取 $f(t,s) = e^{-t}t^{s-1}$ 以及 $G(t) = t^{d-1}$（当 $d \leqslant$ Re$s \leqslant 3d$ 时），$K(t) = e^{-\frac{t}{2}}$。
对任意的 $d > 0$，由于当 $d \leqslant$ Re$s \leqslant 3d$ 时，

$$|f(t,s)| \leqslant G(t),\text{若 } 0 < t \leqslant 1,$$
$$|f(t,s)| = O(K(t)),\text{若 } 1 \leqslant t < \infty,$$

且极限

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{d}(1 - \delta^d) = \frac{1}{d}$$

与

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x K(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} 2(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

都存在,因此立即得(i)。

(ii) 当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时,由分部积分可得(严格地说,应将积分先拆成$\int_0^1 + \int_1^\infty$,后将两个积分分别写成极限,对于有限区间上的积分先分别分部积分,再取极限)

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^s\mathrm{d}t = -e^{-t}t^s\Big|_0^\infty + \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t = s\Gamma(s)。$$

这一关系式启发我们可将 $\Gamma(s)$ 由 $\mathrm{Re}s > 0$ 解析开拓至整个 s 平面中去掉原点及负整数的开连通集 Ω_1 上去。对任给的复数 $s \in \Omega_1$,$\mathrm{Re}s \leqslant 0$,可找到唯一的正整数 N,使得 $-N < \mathrm{Re}s \leqslant 1 - N$,这时令

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+N)}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N-1)}。 \tag{7}$$

则由(i),以这种方式我们定义了 Ω_1 上的一个解析函数。由 $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ 不难验证 $\Gamma(s)$ 在极点 $s = 0, -1, -2, \cdots$ 处的残数为

$$\lim_{s \to 0} s\Gamma(s) = \Gamma(1) = 1,$$

且这些极点都是单重极点。

(iii) 设 n 为充分大自然数。由引理 1.1.2 的(i) 可知当 $0 \leqslant t < n$ 时,

$$e^{-\frac{t}{n}} \geqslant 1 - \frac{t}{n}, e^{-t} \geqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

并且显然当 $t = n$ 时此式也成立。由引理 1.1.2 的(ii) 可知当 $0 \leqslant \frac{t}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$e^{\frac{t}{n}}(1 - \frac{t}{n}) \geqslant e^{-(\frac{t}{n})^2}, \quad e^t(1 - \frac{t}{n})^n \geqslant e^{-\frac{t^2}{n}}。$$

所以

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}(1 - e^t(1 - \frac{t}{n})^n) \leqslant e^{-t}(1 - e^{\frac{-t^2}{n}})。$$

若 $t < \sqrt{n}$,由引理 1.1.2 的(i) 有

$$e^{-\frac{t^2}{n}} \geqslant 1 - \frac{t^2}{n},$$

而若 $\frac{n}{2} \geqslant t \geqslant \sqrt{n}$,则显然此不等式也成立。所以

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leqslant \frac{t^2}{n}e^{-t}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{n}{2}。$$

此式在 $\frac{n}{2} < t \leqslant n$ 时是显然的。综合这些估计,在 $0 \leqslant t \leqslant n$ 时,我们有

$$0 \leqslant e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leqslant t^2 e^{-t} n^{-1}。$$

由此,对于实的 s, $s > 1$,得到

$$0 \leqslant \int_0^n e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t - \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{s-1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n t^{s+1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\Gamma(s + 2)。$$

令 $n \to \infty$,得

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{s-1} \mathrm{d}t。$$

做变量替换,不断分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\mathrm{d}t &= n^s\left(\int_0^1(1-\omega)^n\omega^{s-1}\mathrm{d}\omega\right)\\ &= \frac{n^{s+1}}{s}\left(\int_0^1\omega^s(1-\omega)^{n-1}\mathrm{d}\omega\right)\\ &= n^s\cdot\frac{n(n-1)}{s(s+1)}\left(\int_0^1\omega^{s+1}(1-\omega)^{n-2}\mathrm{d}\omega\right)\\ &= \cdots\\ &= \frac{n^s\cdot n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}。\end{aligned}$$

所以,当 $s>1$ 时,

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}\right)。$$

令 $P_n(s)=(1+s)(1+\frac{s}{2})\cdots(1+\frac{s}{n})$,则(设 $s>1$)

$$\log P_n(s)=\log(1+s)+\sum_{2\leqslant k\leqslant n}\log\left(1+\frac{s}{k}\right)。$$

在推论 1.1.4 中取 $f(n)=\log(1+\frac{s}{n})$,可得

$$\begin{aligned}\sum_{1<k\leqslant n}\log\left(1+\frac{s}{k}\right) &= \int_1^n\log\left(1+\frac{s}{x}\right)\mathrm{d}x-\int_1^n\frac{s\psi(x)}{x(s+x)}\mathrm{d}x\\ &\quad-\frac{1}{2}\log(1+s)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{s}{n}\right)\\ &= \left(n+s+\frac{1}{2}\right)\log(s+n)-\left(s+\frac{3}{2}\right)\log(s+1)\\ &\quad-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-\int_1^n\frac{s\psi(x)}{x(s+x)}\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

令 $\sigma(x)=\int_0^x\psi(u)\mathrm{d}u$,这是 x 的连续函数。设 $k(x)$ 为某个区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续可导函数,α 及 β 为整数,我们来证明

$$\int_\alpha^\beta\psi(x)k(x)\mathrm{d}x=-\int_\alpha^\beta\sigma(x)k'(x)\mathrm{d}x。\tag{8}$$

为此,只需证明,当 m 为整数且 $[m,m+1]\subseteq[\alpha,\beta]$ 时,

$$\int_m^{m+1}\psi(x)k(x)\mathrm{d}x=-\int_m^{m+1}\sigma(x)k'(x)\mathrm{d}x。\tag{9}$$

任给 $\varepsilon>0$，ε 充分小，我们可由当 $m\leqslant x\leqslant m+1-\varepsilon$ 时 $\psi(x)=x-m-\frac{1}{2}$ 及

$$\sigma(x)=\left(\int_0^1+\int_1^2+\cdots+\int_m^x\right)\psi(u)\mathrm{d}x=\int_m^x\psi(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{x-m}\psi(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(x^2-2mx+m^2)-\frac{1}{2}(x-m),$$

（注意：$\psi(u)$ 是周期为 1 的函数，且 $\int_0^1\psi(u)\mathrm{d}u=0$），分部积分得到

$$\int_m^{m+1-\varepsilon}\sigma(x)k'(x)\mathrm{d}x=k(x)\sigma(x)\Big|_m^{m+1-\varepsilon}-\int_m^{m+1-\varepsilon}\psi(x)k(x)\mathrm{d}x。$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得(9)，再对 n 求和可得(8)。由(8)易得

$$\int_1^n\frac{s\psi(x)}{x(x+s)}\mathrm{d}x=\int_1^n\psi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+s}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_1^n\frac{\sigma(x)}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^n\frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}\mathrm{d}x。$$

由此可得

$$\log(1+s)+\sum_{1<k\leqslant n}\log(1+\frac{s}{n})=(n+s+\frac{1}{2})\log(s+n)$$

$$-(s+\frac{1}{2})\log(s+1)-(n+\frac{1}{2})\log n$$

$$-\int_1^n\frac{\sigma(x)}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^n\frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}\mathrm{d}x。$$

所以

$$P_n(s)=(s+n)^{n+s+\frac{1}{2}}n^{-n-\frac{1}{2}}(s+1)^{-s-\frac{1}{2}}\exp\left(-\int_1^n\frac{\sigma(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_1^n\frac{\sigma(x)}{(s+x)^2}\mathrm{d}x\right)。$$

于是，对实的 s，$s>1$，我们有（注意：$\sigma(x)=O(1)$）

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^s}{sP_n(s)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{s+n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}\times\right.$$

$$(s+1)^{s+\frac{1}{2}}s^{-1}\exp\left(\int_1^n \frac{\sigma(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{\sigma(x)}{(s+x)^2}\mathrm{d}x\right)。$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{s+n}\right)^s = 1, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-n} = e^{-s},$$

所以，当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时，

$$\Gamma(s) = \exp\left((s+\frac{1}{2})\log(s+1) - \log s - s + \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}\mathrm{d}x\right)。\tag{10}$$

由(ii) 可知此式左、右两端均为 Ω_2 上的解析函数（注意，$\int_1^\infty \sigma(x)(x+s)^{-2}\mathrm{d}x$ 为 Ω_2 上的解析函数，这可与引理 1.1.1 的证明类似地推导），因此由解析开拓可知(10) 当 $s\in\Omega_2$ 时也成立。若 s 为负实数，且 s 不为整数，则由

$$\Gamma(s) = \Gamma(s+1)\frac{1}{s} = \cdots$$

$$= \Gamma(s+N)\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+N-1)}, s+N > 1,$$

可知 $\Gamma(s)\neq 0$。若 s 不为负实数，则由(10) 立即知道 $\Gamma(s)\neq 0$。所以 $\Gamma(s)$ 无零点。

(iv) 设 $s=\tau+it$, $|t|\geqslant 1$, τ 及 t 为实数。则

$$\log(s+1) = \log\sqrt{(\tau+1)^2+t^2} + i\theta_1, -\pi < \theta_1 < \pi,$$

$$\log s = \log\sqrt{\tau^2+t^2} + i\theta_2, -\pi < \theta_2 < \pi。$$

由

$$\log(1+X) = O(X), X > 0,$$

得

$$(s+\frac{1}{2})\log(s+1) - \log s = (\tau-\frac{1}{2})\log|t| - t\theta_1$$

$$+ \lambda i + O\left(\frac{(|\tau| + 1)^3}{t}\right), \tag{11}$$

其中 λ 为一个实数。应用 Taylor 展开式可得

$$\cos(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1 - \frac{\pi}{2})^2 + O\left((\theta_1 - \frac{\pi}{2})^4\right),$$

又

$$\cos(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta_1 = \left(1 + \frac{(\tau + 1)^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^4\right),$$

所以

$$\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^2\left(1 + O\left(\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^2\right)\right)$$

$$= \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2\left(1 + O\left(\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right)。 \tag{12}$$

熟知,成立不等式

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \left|\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right| \leqslant 1, |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}。$$

设 $t > 0$。当 $0 < \theta_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时,由

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \cos\theta_1 = O\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)$$

可得 $\left|\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right| \ll \dfrac{|\tau| + 1}{t}$。当 $\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 \leqslant \pi$ 时,由

$$\sin\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta_1 = O\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right),$$

也得 $\left|\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right| \ll \dfrac{|\tau| + 1}{t}$。所以 $\left|\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right| = O\left(\dfrac{|\tau| + 1}{t}\right)$ 总成立。由(12) 及 $(1 + |X|)^{\frac{1}{2}} = 1 + O(|X|)$,可得

$$\frac{|\tau + 1|}{t}\left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)^2\right)\right)$$

$$= \left|\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right|\left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)^2\right)\right)。 \tag{13}$$

若 $\tau + 1 > 0$,则 $\cos\theta_1 > 0, 0 \leqslant \theta_1 < \frac{\pi}{2}, (\tau + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) > 0$,

若 $\tau + 1 < 0$,则 $\cos\theta_1 < 0, \frac{\pi}{2} \leqslant \theta_1 < \pi, (\tau + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) > 0$,

所以当 $t > 0$ 时,$(\tau + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) > 0$ 总成立。因此由(13)得到

$$\frac{\tau + 1}{t}\left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)^2\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)^2\right)\right),$$

$$t\theta_1 = -\tau - 1 + \frac{\pi}{2}t + O\left(\frac{(|\tau| + 1)^3}{t}\right)。$$

当 $t < 0$ 时,$\sin\theta_1 < 0, -\pi < \theta_1 < 0$。令 $\theta_1' = -\theta_1, t' = -t$,可得

$$\sin\theta_1' = \frac{t'}{\sqrt{(\tau + 1)^2 + (t')^2}}, \quad \cos\theta_1' = \frac{\tau + 1}{\sqrt{(\tau + 1)^2 + (t')^2}}。$$

则同样地可得

$$t\theta_1 = t'\theta_1' = -\tau - 1 + \frac{\pi}{2}t' + O((|\tau| + 1)^3|t|^{-1})。$$

所以我们总有

$$t\theta_1 = -\tau - 1 + \frac{\pi}{2}|t| + O((|\tau| + 1)^3|t|^{-1}), |t| \geqslant 1。$$

将此代入(11),得

$$|\Gamma(s)| = c\exp\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\log|t| - \frac{\pi}{2}|t| + O((|\tau| + 1)^3|t|^{-1}) + \mathrm{Re}\left(\int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(x + s)^2}\mathrm{d}x\right)\right),$$

其中 $c = \exp\left(1 + \int_1^\infty \sigma(x)x^{-2}\mathrm{d}x\right)$。我们有

$$\left|\int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(x + s)^2}\mathrm{d}x\right| \ll \int_1^{2|s|} |t|^{-2}\mathrm{d}x + \int_{2|s|}^\infty x^{-2}\mathrm{d}x = O((|\tau| + 1)|t|^{-1}),$$

因此(iv) 得证。

(v) 当 $s \in \Omega_2$ 时,在(10) 两边通过求导可得

$$\Gamma'(s) = \Gamma(s) \cdot \left(\log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2\int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(s+x)^3} \mathrm{d}x \right),$$

所以

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2\int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(s+x)^3} \mathrm{d}x。$$

应用引理 1.1.1 的(ii) 的类似证法,可证此右端的积分在 $\{s \mid |s| < 1\}$ 上解析,因此由解析开拓,可知此式在 $\{s \mid 0 < |s| < 1\}$ 上成立。当 $s = \tau + it$, $|t| \geqslant c_1 > 0$,或 $0 < c_2 \leqslant |\tau| \leqslant c_3 < 1$,或 $\tau \geqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{1}{|s|}, \frac{1}{|s+1|} \ll \frac{1}{|t|+1},$$

并且(利用 $|\sigma(x)| \ll 1$)

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(s+x)^3} \mathrm{d}x \right| \ll \int_1^{T} \frac{1}{(|t|+1)^3} \mathrm{d}x + \int_T^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

$$\ll \frac{|t| + 2|\tau|}{(|t|+1)^3}, T = 2|t| + 2|\tau|,$$

所以

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) + O\left(\frac{|\tau|+1}{|t|+1}\right)。$$

证毕。

练　　习

(Ⅰ) 用定义和证明引理 1.1.1 的(i) 的类似方法,证明引理 1.1.1 的(ii)。

(Ⅱ) 直接应用定理 1.1.5 的(iii),证明当 $s \in \Omega_2$ 时,$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$。

§1.2 特征与特征和

设 q 为正整数。模 q 的一个特征函数 $\chi(n)$ 是一个对所有整数 n 有定义的、周期为 q 的完全积性复值函数，并且当 $(n,q)=1$ 时，$|\chi(n)|=1$，而当 $(n,q)>0$ 时，则 $\chi(n)=0$。若当 $(n,q)=1$ 时 $\chi(n)=1$ 总成立，则称 $\chi(n)$ 为主特征。模 q 的主特征通常记为 $\chi_q^0(n)$，或 $\chi_0(n)$。显然，模 q 的主特征函数是唯一的。若模 q 的非主特征 $\chi(n)$ 的最小正周期恰好是 q，则称 $\chi(n)$ 为原特征。由定义易导出 $\chi(1)=1$。由此容易看到，当 $q=1$ 和 $q=2$ 时，模 q 仅有主特征。若 $\chi(n)$ 为模 q 的一个非主、非原特征，则用带余除法容易证明存在某个正整数 q_1，$q_1|q$，$1<q_1<q$，使得 q_1 为 $\chi(n)$ 的最小正周期，从而当 $(n,q)=1$ 时，$\chi(n+q_1)=\chi(n)$ 总成立。若 $\chi_1(n)$ 及 $\chi_2(n)$ 分别为模 q_1 及 q_2 的特征，则显然 $\chi_1(n)\chi_2(n)$ 为模 $[q_1,q_2]$ 的特征，这里 $[q_1,q_2]$ 为 q_1 与 q_2 的最小公倍数。只取实值的特征称为实特征，否则称为复特征。既为实特征又为原特征的特征，称为实原特征。

我们研究特征的性质。先证一个引理。

引理 1.2.1 (i) 若 $q=2^\alpha$，α 为整数，$\alpha\geqslant 3$，则当 $2\nmid n$ 且 n 为整数时，存在唯一的一组满足 $0\leqslant\alpha(n)\leqslant 1$，$1\leqslant\beta(n)\leqslant 2^{\alpha-2}$ 的整数 $\{\alpha(n),\beta(n)\}$，使得

$$n\equiv(-1)^{\alpha(n)}5^{\beta(n)}(\bmod 2^\alpha)。$$

(ii) 对任意的正整数 q，$q\geqslant 3$，当 a 为正整数，$(a,q)=1$ 且 $a\not\equiv 1(\bmod q)$，存在一个模 q 的特征 $\chi(n)$，使得 $\chi(a)\neq 1$。

证明：(i) 用数学归纳法容易证明

$$5^{2^{k-2}}\equiv 1(\bmod 2^k),\ 5^{2^{k-2}}\not\equiv 1(\bmod 2^{k+1}),\ k\geqslant 2。$$

由此不难验证:$2^{\alpha-1}(=\varphi(q))$ 个整数

$$-5^{2^{\alpha-2}},-5^{2^{\alpha-2}-1},\cdots,-5^2,-5,5,5^2,\cdots,5^{2^{\alpha-2}-1},5^{2^{\alpha-2}}$$

模 2^α 互不同余,从而构成模 2^α 的一个缩系。于是,对每个整数 n,都存在唯一的一组整数$\{\alpha(n),\beta(n)\}$,使得

$$\alpha(n)=0\text{ 或 }1,1\leqslant\beta(n)\leqslant 2^{\alpha-2},n\equiv(-1)^{\alpha(n)}2^{\beta(n)}(\bmod 2^\alpha)。$$

(ii) 由 $a\not\equiv 1(\bmod q),(a,q)=1$,必存在一个素数 p 和一个正整数 α,使得 $p^\alpha|q,a\not\equiv 1(\bmod p^\alpha)$。我们分三种情况。

(a) 若 p 为奇素数,设 g 为模p^α 的一个原根,当$(n,p)=1$时,$v(n)$ 为满足

$$n\equiv g^{v(n)}(\bmod p^\alpha),1\leqslant v(n)\leqslant\varphi(p^\alpha)$$

的唯一整数(即“指数”)。令

$$\chi_1(n)=\begin{cases}e\left(\dfrac{v(n)}{\varphi(p^\alpha)}\right), & \text{若 } p\nmid n,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 $e(\xi)=e^{2\pi i\xi},\chi(n)=\chi_1(n)\chi_0(n),\chi_0$ 为模 q 的主特征。则易知 $\chi_1(n)$ 为模 p^α 的特征,$\chi(n)$ 为模 q 的特征,且 $\chi(a)=\chi_1(a)\neq 1$。

(b) 若 $p=2$,则 $\alpha\geqslant 2$。当 $\alpha=2$ 时,令

$$\chi_1(n)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{若 } 2\nmid n,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

并令 $\chi(n)=\chi_1(n)\chi_0(n)$。则 $\chi_1(n)$ 为模4的特征,$\chi(n)$ 为模 q 的特征,而我们有 $\chi(a)=\chi_1(a)\neq 1$。

(c) 当 $p=2,\alpha\geqslant 3$时,对每个整数 $n,(n,2)=1$,由(i)知存在唯一一组整数$\{\alpha(n),\beta(n)\}$,满足

$$0\leqslant\alpha(n)\leqslant 1,1\leqslant\beta(n)\leqslant 2^{\alpha-2},n\equiv(-1)^{\alpha(n)}5^{\beta(n)}(\bmod 2^\alpha)。$$

由 $a\not\equiv 1(\bmod 2^\alpha)$,可知$\{\alpha(a),\beta(a)\}\neq\{0,2^{\alpha-2}\}$。当 $\beta(a)=$

$2^{\alpha-2}$ 时，$\alpha(a)\neq 0$，这时令

$$\chi_1(n)=\begin{cases}(-1)^{\alpha(n)}, & \text{若 } 2\nmid n,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

及 $\chi(n)=\chi_1(n)\chi_0(n)$。当 $\beta(a)\neq 2^{\alpha-2}$ 时，令

$$\chi_1(n)=\begin{cases}e\left(\dfrac{\beta(n)}{2^{\alpha-2}}\right), & \text{若 } 2\nmid n,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

并令 $\chi(n)=\chi_1(n)\chi_0(n)$。两种情况下，$\chi_1(n)$ 总是模 2^α 的特征，$\chi(n)$ 总是模 q 的特征，且 $\chi(a)=\chi_1(a)\neq 1$。**证毕**。

定理 1.2.2 (i) 模 q 共有 $\varphi(q)$ 个特征(函数)。

(ii) 设 a 和 n 为整数，$(an,q)=1$，则

$$\sum_\chi \chi(n)\overline{\chi}(a)=\begin{cases}\varphi(q), & \text{若 } n\equiv a(\bmod q),\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

这里求和过模 q 的所有特征。

(iii) 设 χ 为模 q 的特征，则

$$\sum_a \chi(a)=\begin{cases}\varphi(q), & \text{若 } \chi=\chi_0,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 a 通过模 q 的一个完全剩余系。

(iv) 设 $q=q_1^{\alpha_1}\cdots q_n^{\alpha_n}$ 为 q 的标准素因子分解式，则模 q 的每个特征 χ 都可唯一地分解为乘积 $\chi_1\cdots\chi_n$，其中 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征，并且，χ 为模 q 的主特征，当且仅当每个 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征，而 χ 为模 q 的原特征，则当且仅当每个 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征。

(v) 模 1 和模 2 的特征仅有主特征。设 $q\geqslant 3$，若 q 为素数，则每个模 q 的非主特征都是原特征。若 q 不为素数，则对每个模 q 的非主、非原的特征 χ，都存在唯一的正整数 q'，$3\leqslant q'<q$，$q'\mid q$，以及模 q' 的唯一的原特征 χ_1，使得 $\chi(n)=\chi_0(n)\chi_1(n)$，其中 $\chi_0(n)$ 为模 q 的主特征(这时我们称 $\chi(n)$ 是由 $\chi_1(n)$ 诱导

的)。

(vi) 设 χ_i 为模 q_i 的原特征，$i=1,2$。用 $\overline{\chi}_2(n)=\overline{\chi_2(n)}$ 记 $\chi_2(n)$ 的共轭特征。若模 $[q_1,q_2]$ 的特征 $\chi_1\overline{\chi}_2$ 为主特征，则必 $q_1=q_2$，且 $\chi_1(n)=\chi_2(n)$。

证明：(i)、(ii)、(iii) 的证明。设 $a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(q)}$ 为模 q 的一个给定的缩剩余系。对每个模 q 的特征 $\chi(n)$，令它相应于一个有序数组

$$A(\chi)=\{\chi(a_1),\chi(a_2),\cdots,\chi(a_{\varphi(q)})\}。$$

显然，若 $\chi_1\neq\chi_2$，则有某个 a_i 使得 $\chi_1(a_i)\neq\chi_2(a_i)$，从而 $A(\chi_1)\neq A(\chi_2)$。但由 Fermat 小定理可知，对每个 a_j 都有

$$a_j^{\varphi(q)}\equiv 1(\bmod q),$$

故

$$(\chi(a_j))^{\varphi(q)}=\chi(a_j^{\varphi(q)})=\chi(1)=1,$$

从而 $\chi(a_j)$ 为一个 $\varphi(q)$ 次单位根。不妨设

$$\chi(a_j)=\exp\left(\frac{2\pi ic_j}{\varphi(q)}\right)=e\left(\frac{c_j}{\varphi(q)}\right),$$

c_j 为某个整数。因为形如

$$\left\{e\left(\frac{c_1}{\varphi(q)}\right),e\left(\frac{c_2}{\varphi(q)}\right),\cdots,e\left(\frac{c_{\varphi(q)}}{\varphi(q)}\right)\right\}$$

不同的数组不超过 $(\varphi(q))^{\varphi(q)}$ 个，所以仅有有限个不同的特征函数。设模 q 有 c 个特征函数，$c\geqslant 1$。设 $(a,q)=1$，并令

$$S(a)=\sum_{\chi}\chi(a),$$

这里求和过模 q 的一切特征。若 $a\equiv 1(\bmod q)$，则显然 $S(a)=c$。设 $a\not\equiv 1(\bmod q)$，于是存在一个素数 p 和一个正整数 $\alpha\geqslant 1$，使得 $p^\alpha|q$，$a\not\equiv 1(\bmod p^\alpha)$。由引理 1.2.1 的(ii)，可知存在一个模 q 的特征 ψ，使得 $\psi(a)\neq 1$。注意到，若 $\chi_1,\cdots,\chi_c$ 为模 q 的所有不同

特征,则 $\psi\chi_1,\psi\chi_2,\cdots,\psi\chi_c$ 也表示模 q 的全体不同特征。因此

$$\psi(a)\cdot S(a)=\sum_{\chi}\psi(a)\chi(a)=S(a),$$

由此可得 $S(a)=0$。设 χ 为模 q 的任一特征,令

$$S_1(\chi)=\sum\chi(a),$$

这里 a 通过模 q 的任一个缩系。当 $\chi=\chi_0$ 时,显然 $S_1(\chi)=\varphi(q)$。当 $\chi\neq\chi_0$ 时,必有一个整数 $b,(b,q)=1$,使得 $\chi(b)\neq1$。因为当 a 通过模 q 的一个缩系时,ab 也是如此,所以

$$\chi(b)S_1(\chi)=\sum_{a}\chi(ab)=S_1(\chi),$$

由此得到 $S_1(\chi)=0$。根据

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}S(a)=c,\sum_{\chi}S_1(\chi)=\varphi(q)$$

和

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}S(a)=\sum_{\chi}S_1(\chi),$$

可得 $c=\varphi(q)$。对给定的 $a,(a,q)=1$,设 $(b,q)=1$,b 满足 $ab\equiv1(\bmod q)$,则由

$$\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)=1$$

可知 $\overline{\chi}(a)=\chi(b)$。所以,当 $(n,q)=1$ 时,根据已证明的关于 $S(a)$ 的结论,我们得

$$\sum_{\chi}\chi(n)\overline{\chi}(a)=\sum_{\chi}\chi(n)\chi(b)=\sum_{\chi}\chi(nb)$$
$$=\begin{cases}\varphi(q), & 若\ n\equiv a(\bmod q),\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

(i)、(ii)、(iii) **证毕**。

(iv) 的证明。设 $\chi(n)$ 为模 q 的任一特征,并设 $q=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式。我们用 χ 构作模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征 χ_i。由孙子定理,对任一整数 $m,(m,q_i)=1$,可选取一个整数 $n,(n,q)=$

1,满足

$$n \equiv m(\bmod\ q_i^{\alpha_i}), n \equiv 1(\bmod\ q_j^{\alpha_j}), j \neq i。$$

这时,令 $\chi_i(m) = \chi(n)$。不难验证 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征,并且 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r$。显然,若 χ 为模 q 的主特征,则 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征。反之,若 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征,$1 \leqslant i \leqslant r$,则显然 $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \chi_i$ 为模 q 的主特征。我们断言:若

$$\chi(n) = \chi_1(n) \cdots \chi_r(n) = \chi'_1(n) \cdots \chi'_r(n),$$

并且 χ_i 和 χ'_i 都是模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征,则必有 $\chi_i(n) = \chi'_i(n)$,$1 \leqslant i \leqslant r$。为证明这个结论,当 $(m, q_i) = 1$ 时,我们可用孙子定理,选取一个整数 n,$(n, q) = 1$,满足

$$n \equiv m(\bmod\ q_i^{\alpha_i}), n \equiv 1(\bmod\ q_j^{\alpha_j}), j \neq i。$$

然后,将 n 代入上述等式中,即得 $\chi_i(m) = \chi'_i(m)$。这说明 χ 可按我们构作的方式唯一地分解为若干特征的乘积。对模 q 的特征 χ 的上述乘积分解,若 χ 为模 q 的原特征,则 χ_i 必为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征,因为若不然,则有 $0 \leqslant \beta_i < \alpha_i$,使得当 $(n, q_i) = 1$ 时,$\chi_i(n + q_i^{\beta_i}) = \chi_i(n)$ 成立。这时,令 $q' = q_i^{\beta_i} \prod\limits_{j \neq i} q_j^{\alpha_j}$,则对任意整数 n,$(n, q) = 1$,$\chi(n + q') = \chi(n)$ 成立,而这与 χ 为模 q 的原特征的假设矛盾。反之,若 χ_i 都是模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征,$1 \leqslant i \leqslant r$,则 χ 必是模 q 的原特征,因为若不然,必有 $1 \leqslant q' < q$,且 $q' | q$,使得 $\chi(n + q') = \chi(n)$ 当 $(n, q) = 1$ 时成立。设 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$,而且 $q_i^{\beta_i} | q'$,$q^{\beta_i + 1} \nmid q'$,$0 \leqslant \beta_i < \alpha_i$。任给整数 m,$q_i \nmid m$,由孙子定理,我们可选取两个整数 n_1 与 n_2,分别满足

$$n_1 \equiv m(\bmod\ q_i^{\alpha_i}), \qquad n_2 \equiv m + q_i^{\beta_i}(\bmod\ q_i^{\alpha_i}),$$

$$n_1 \equiv 1(\bmod\ q_i^{\alpha_i}), j \neq i, \qquad n_2 \equiv 1(\bmod\ q_j^{\alpha_j}), j \neq i。$$

则我们看到 $n_1 \equiv n_2(\bmod\ q')$,所以 $\chi(n_1) = \chi(n_2)$。但

$\chi(n_1)=\chi_i(n)=\chi_i(m),\chi(n_2)=\chi_i(n_2)=\chi_i(m+q_i^{\beta_i})$，所以 $\chi_i(m)=\chi_i(m+q_i^{\beta_i})$，而这与 χ_i 是模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征的假设矛盾。

(v)、(vi) 的证明。当 $q=1$ 或2时，显然模 q 仅有主特征（这也可以用(i) 以及 $\varphi(1)=\varphi(2)=1$ 来加以说明）。若 q 为素数，$q\geqslant 3$，则每个模 q 的非主特征都是原特征，因为否则由定义将有正整数 q'，$1<q'<q$，且 $q'|q$，这是不可能的。设 q 不是素数，$q\geqslant 3$。由(iv) 可知，若 $q=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式，则 $\chi=\chi_1\cdots\chi_r$，χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征。某些 χ_i 可能为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征，因此，当 $(n,q)=1$ 时，我们有 $\chi(n)=\chi_1'(n)\cdots\chi_s'(n)$，$\chi_i'$ 为模 $p_i^{\beta_i}$ 的非主特征，$\{p_i,\beta_i\}$ 为某组 $\{q_j,\alpha_j\}$。对每个 i，存在最小的 r_i，$1\leqslant r_i\leqslant\beta_i$，使得当 $n_1\equiv n_2(\bmod p_i^{r_i})$ 且 $p_i\nmid n_1n_2$ 时，$\chi'_i(n_1)=\chi'_i(n_2)$。按定义，这时 χ'_i 就是模 $p_i^{r_i}$ 的原特征，因此，由(iv) 可知，$\psi(n)=\chi'_1(n)\ldots\chi'_s(n)$ 为模 $q'=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{r_i}$ 的原特征，$q'|q$。这样，当 $(n,q)=1$ 时，$\chi(n)=\psi(n)$ 成立，故 $\chi(n)=\chi_1(n)\chi_0(n)$ 总成立。至于唯一性，若 $\chi_0\chi_1=\chi_0\chi_2$，$\chi_i(n)$ 为模 q_i 的原特征，$q_i|q$，$i=1,2$，我们要证明 $q_1=q_2$，$\chi_1(n)=\chi_2(n)$。设

$$q_1=u_1^{\alpha_1}\cdots u_r^{\alpha_r},\quad q_2=v_1^{\beta_1}\cdots v_s^{\beta_s},$$

这里 $u_1,\cdots,u_r$ 为互不相同的素数，$v_1,\cdots,v_s$ 为互不相同的素数。则由(iv) 可知有分解

$$\chi_1=\chi_1^{(1)}\cdots\chi_r^{(1)},\chi_2=\chi_1^{(2)}\cdots\chi_s^{(2)} \tag{1}$$

这里 $\chi_i^{(1)}(n)$ 为模 $u_i^{\alpha_i}$ 的原特征，$\chi_j^{(2)}(n)$ 为模 $v_j^{\beta_j}$ 的原特征。若 $u_1\neq v_1,\ldots,v_s$，对任意的整数 m，$(m,u_1)=1$，由孙子定理，我们可找到一个正整数 n，使得

$$n\equiv m(\bmod u_1^{\omega_1}),\quad n\equiv 1(\bmod qu_1^{-\omega_1}),$$

这里 ω_1 为满足 $u_1^{\omega_1} \mid q, u_1^{\omega_1+1} \nmid q$ 的正整数。由 $(n,q)=1, \chi_0\chi_1 = \chi_0\chi_2$ 以及(1),可得 $\chi_1^{(1)}(m)=1$,这与 $\chi_1^{(1)}$ 为模 $u_1^{\alpha_1}$ 的原特征矛盾。不妨设 $u_1 = v_1$。若 $\alpha_1 < \beta_1$,对任意的正整数 $m,(m,u_1)=1$,由孙子定理,选取正整数 n,使得

$$n \equiv m(\bmod u_1^{\beta_1}), n \equiv 1(\bmod qu_1^{-\omega_1}),$$

ω_1 定义同前。则 $(n,q)=1$。由 $\chi_0\chi_1 = \chi_0\chi_2$ 及(1),可得 $\chi_1^{(1)}(m) = \chi_1^{(2)}(m)$,则

$$\chi_1^{(2)}(m+u_1^{\alpha_1}) = \chi_1^{(1)}(m+u_1^{\alpha_1}) = \chi_1^{(1)}(m) = \chi_1^{(2)}(m),$$

这与 $\chi_1^{(2)}$ 为模 $u_1^{\alpha_2} = v_1^{\alpha_2}$ 的原特征矛盾。所以 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$。同理可得 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$,因此 $\alpha_1 = \alpha_2$。类似地推理,可得 $u_i^{\alpha_i} = v_i^{\beta_i}, \chi_i^{(1)} = \chi_i^{(2)}$, $r=s$。所以 $q_1 = q_2, \chi_1 = \chi_2$,这就证明了唯一性。特别地,若 χ_0 为模 $[q_1,q_2]$ 的主特征,χ_i 为模 q_i 的原特征,使得 $\chi_1\overline{\chi}_2 = \chi_0$,则当 $(n,[q_1,q_2])=1$ 时,

$$\chi_0(n)\chi_2(n) = \chi_1(n)\overline{\chi}_2(n)\chi_2(n) = \chi_1(n)\chi_0(n),$$

因此,必有 $q_1 = q_2$ 及 $\chi_1(n) = \chi_2(n)$。

定理证毕。

设 χ 为模 q 的一个特征,令

$$S(n,\chi) = \sum_{1 \leqslant a \leqslant q} \chi(a) e\left(\frac{na}{q}\right), e(\xi) = \exp(2\pi i\xi)。$$

我们称这种和为 Gauss 和,并特别记 $S(1,\chi)$ 为 $\tau(\chi)$。关于 Gauss 和,我们有

定理 1.2.3 (i) 若 χ 为模 q 的特征,则当 $(n,q)=1$ 时

$$S(n,\chi) = \overline{\chi}(n) \cdot \tau(\chi),$$

并且等式当 χ 为原特征及 $(n,q) > 1$ 时也成立。

(ii) 若 χ 为模 q 的原特征,则 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$。若 χ 为模 q 的

任意特征，则 $|\tau(\chi)| \leqslant \sqrt{q}$。

(iii) 当 χ 为模 q 的主特征 χ_0 时，和 $S(n,\chi_0)$ 被称为 Ramanujan 和，通常记为 $c_q(n)$，其值为

$$c_q(n) = S(n,\chi_0) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} e\left(\frac{na}{q}\right) = \frac{\varphi(q)\mu(q/(q,n))}{\varphi(q/(q,n))}。$$

特别地，当 $(q,n) = 1$ 时，$c_q(n) = \mu(q)$。

证明：(i) 若 $q = q_1q_2$，$(q_1q_2) = 1$，$\chi(a) = \chi_1(a)\chi_2(a)$，$\chi_i$ 为模 q_i 的特征，则当 a_1 和 a_2 分别通过模 q_1 和 q_2 的一个缩系时，$a_1q_2 + a_2q_1$ 通过模 q_1q_2 的一个缩系，故由

$$\begin{aligned}\chi(a_1q_2 + a_2q_1) &= \chi_1(a_1q_2 + a_2q_1)\chi_2(a_1q_2 + a_2q_1)\\ &= \chi_1(a_1q_2)\chi_2(a_2q_1)\\ &= \chi_1(a_1)\chi_1(q_2)\chi_2(a_2)\chi_2(q_1),\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}S(n,\chi) &= \chi_1(q_2)\chi_2(q_1)\left(\sum_{a_1}\chi_1(a)e\left(\frac{a_1n}{q_1}\right)\right)\left(\sum_{a_2}\chi_2(a_2)e\left(\frac{a_2n}{q}\right)\right)\\ &= \chi_1(q_2)\chi_2(q_1)S(n,\chi_1)S(n,\chi_2)。\end{aligned} \tag{2}$$

若 $(n,q) = 1$，令 $\bar{n}$ 为满足 $\bar{n}n \equiv 1(\bmod q)$ 的任一整数。当 b 通过模 q 的缩系时，$\bar{n}b$ 也通过模 q 的一个缩系。所以

$$\begin{aligned}S(n,\chi) &= \sum_{1\leqslant b\leqslant q}\chi(\bar{n}b)e\left(\frac{n\bar{n}b}{q}\right) = \chi(\bar{n})\left(\sum_{1\leqslant b\leqslant q}\chi(b)e\left(\frac{b}{q}\right)\right)\\ &= \chi(\bar{n})\cdot\tau(\chi)。\end{aligned}$$

注意到 $\chi(\bar{n})\chi(n) = \bar{\chi}(n)\chi(n) = 1$，上式可改写为

$$S(n,\chi) = \bar{\chi}(n)\tau(\chi)。 \tag{3}$$

若 χ 为模 q 原特征，则当 $(n,q) > 1$ 时，(3) 式也成立，为此只需证明 $S(n,\chi) = 0$。若 $q = q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式，则由定理 1.2.2 的 (iv)，可知有分解 $\chi = \chi_1\cdots\chi_r$，$\chi_i$ 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征。因为 $(n,q) > 1$，所以必有一个 i，使得 $q_i|n$，不妨设 $i = 1$。则由

(2),欲证 $S(n,\chi)=0$,仅需证明 $S(n,\chi_1)=0$ 即可。简记 $p_1^{\alpha_1}=p^{\alpha}$。对每个 $a, 1\leqslant a\leqslant p^{\alpha}$, a 可以唯一地表示为 $p^{\alpha-1}u+v, 0\leqslant u<p, 1\leqslant v\leqslant p^{\alpha-1}$。若 $\alpha=1$,则显然

$$S(n,\chi_1)=\sum_{1\leqslant a\leqslant p}\chi_1(a)=0。$$

设 $\alpha\geqslant 2$。则

$$\begin{aligned}S(n,\chi_1)&=\sum_{1\leqslant a\leqslant p^{\alpha}}\chi_1(a)e\left(\frac{an}{p^{\alpha}}\right)\\&=\sum_{0\leqslant u\leqslant p}\sum_{1\leqslant v\leqslant p^{\alpha-1}}\chi_1(p^{\alpha-1}u+v)e\left(\frac{(p^{\alpha-1}u+v)n}{p^{\alpha}}\right)\\&=\sum_{\substack{1\leqslant v\leqslant p^{\alpha-1}\\(v,p)=1}}e\left(\frac{vn}{p^{\alpha}}\right)\Big(\sum_{0\leqslant u<p}\chi_1(p^{\alpha-1}u+v)\Big)。\end{aligned}$$

我们断言,对每个整数 $v, p\nmid v$,都有

$$S(v)=\sum_{0\leqslant u<p}\chi_1(p^{\alpha-1}u+v)=0。$$

因为 χ_1 是模 p^{α} 的原特征,由定义,存在两个整数 ω_1 及 ω_2, $p\nmid\omega_1\omega_2$, $\omega_1\equiv\omega_2(\bmod p^{\alpha-1})$,而 $\chi_1(\omega_1)\neq\chi_2(\omega_2)$。设 $\overline{\omega_2}$ 为满足 $\overline{\omega_2}\omega_2\equiv 1(\bmod p^{\alpha})$ 的任一整数,并令 $c=\omega_2\overline{\omega_2}=1+kp^{\alpha-1}$。则 $\chi_1(c)\neq 1$。我们有

$$\begin{aligned}\chi_1(c)S(v)&=\sum_{0\leqslant u<p}\chi_1(p^{\alpha-1}cu+cv)\\&=\sum_{0\leqslant u<p}\chi_1(p^{\alpha-1}(cu+kv)+v)。\end{aligned}$$

因为当 u 通过模 p 的一个完全剩余系时, $cu+kv$ 也通过一个完全剩余系,而 χ_1 是周期为 p^{α} 的函数,所以 $\chi_1(c)S(v)=S(v)$,因此 $S(v)=0$。这证明了 $S(n,\chi_1)=0$。故(3) 当 χ 为原特征及 $(n,q)>1$ 时仍成立。

(ii) 当 χ 为模 q 的原特征时,在(3) 式两边取绝对值,并平方,再对 n 求和,可得

$$|\tau(\chi)|^2\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant q}|\chi(\overline{n})|^2\Big)=\sum_{1\leqslant n\leqslant q}|S(n,\chi)|^2$$

$$=\sum_{1\leqslant a_1\leqslant q}\ \sum_{1\leqslant a_2\leqslant q}\chi(a_1)\overline{\chi(a_2)}\Big(\sum_{1\leqslant n<q}e(n(a_1-a_2)/q)\Big)。$$

因为当$|m|<q$时,由等比级数求和,可知

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant q}e\left(\frac{nm}{q}\right)=\begin{cases}q, & 若\ m=0,\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

所以

$$|\tau(\chi)|^2\cdot\varphi(q)=\varphi(q)\cdot q,|\tau(\chi)|=\sqrt{q}。$$

当χ不为模q的原特征时,设$q=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$为标准素因子分解式,由定理 1.2.2 的(iv) 可知$\chi=\chi_1\cdots\chi_r$,χ_i为模$q_i^{\alpha_i}$的特征。由(2)式可得

$$|\tau(\chi)|=|\tau(\chi_1)|\cdots|\tau(\chi_r)|。\tag{4}$$

我们来证明

$$|\tau(\chi_i)|\leqslant q_i^{\alpha_i/2}。\tag{5}$$

若χ_i为模$q_i^{\alpha_i}$的原特征,由已证明的结论可得$|\tau(\chi_i)|=q_i^{\alpha_i/2}$。若$\chi_i$为模$q_i^{\alpha_i}$的主特征,则

$$\tau(\chi_i)=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q_i^{\alpha_i}\\ q_i\nmid a}}e\left(\frac{a}{q_i^{\alpha_i}}\right)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q_i^{\alpha_i}}e\left(\frac{a}{q_i^{\alpha_i}}\right)-\sum_{1\leqslant b\leqslant q_i^{\alpha_i-1}}e\left(\frac{b}{q_i^{\alpha_i-1}}\right)$$

$$=-\sum_{1\leqslant b\leqslant q_i^{\alpha_i-1}}e\left(\frac{b}{q_i^{\alpha_i-1}}\right),$$

所以

$$\tau(\chi_i)=\begin{cases}1, & \alpha_i=1,\\ 0, & \alpha_i\geqslant 2。\end{cases}$$

若χ_i为模$q_i^{\alpha_i}$的非主、非原特征,则$\alpha_i\geqslant 2$。设χ_i是模$q_i^{\beta_i}$的原特征,$1\leqslant\beta_i<\alpha_i$,则因每个满足$q_i\nmid a$及$1\leqslant a\leqslant q_i^{\alpha_i}$的$a$可唯一

地表示为 $m + nq_i^{\beta_i}, q_i \nmid m, 1 \leqslant m \leqslant q_i^{\beta_i}, 0 \leqslant n \leqslant q_i^{\alpha_i-\beta_i} - 1$，我们有

$$\tau(\chi_i) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant q_i^{\beta_i}} \sum_{0 \leqslant n \leqslant q_i^{\alpha_i-\beta_i}-1} \chi(m + nq_i^{\beta_i}) e\left(\frac{m + n \cdot q_i^{\beta_i}}{q_i^{\alpha_i}}\right)$$

$$= \sum_{1 \leqslant m \leqslant q_i^{\beta_i}} \chi(m) e\left(\frac{m}{q_i^{\alpha_i}}\right)\left(\sum_{0 \leqslant n \leqslant q_i^{\alpha_i-\beta_i}-1} e\left(\frac{n}{q_i^{\alpha_i-\beta_i}}\right)\right) = 0。$$

因此 $|\tau(\chi_i)| \leqslant q_i^{\alpha_i/2}$ 总成立。由(4)可得，当 χ 为模 q 的非原特征时，$|\tau(\chi)| \leqslant \sqrt{q}$。

(iii) 当 χ 为模 q 的主特征时，设 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式，则由定理 1.2.2 的(iv)可知 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r$，$\chi_i$ 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征。由(2)可得

$$c_q(n) = S(n, \chi) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} S(n, \chi_i) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} c_{q_i^{\alpha_i}}(n), \tag{5}$$

而

$$c_{q_i^{\alpha_i}}(n) = S(n, \chi_i) = \sum_{1 \leqslant a \leqslant q_i^{\alpha_i}} \chi_i(a) e\left(\frac{an}{q_i^{\alpha_i}}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q_i^{\alpha_i} \\ q_i \nmid a}} e\left(\frac{an}{q_i^{\alpha_i}}\right)$$

$$= \sum_{1 \leqslant a \leqslant q_i^{\alpha_i}} e\left(\frac{an}{q_i^{\alpha_i}}\right) - \sum_{1 \leqslant b \leqslant q_i^{\alpha_i-1}} e\left(\frac{bn}{q_i^{\alpha_i-1}}\right)。$$

所以，若 $q_i^{\lambda} | n, q_i^{\lambda+1} \nmid n, \lambda \geqslant 0$，则由等比级数求和，当 $\lambda \geqslant \alpha_i$ 时，$S(n, \chi_i) = q_i^{\alpha_i} - q_i^{\alpha_i-1} = \varphi(q_i^{\alpha_i})$，当 $\lambda = \alpha_i - 1$ 时，$S(n, \chi_i) = -q_i^{\alpha_i-1}$，而当 $0 \leqslant \lambda < \alpha_i - 1$ 时，则有 $S(n, \chi_i) = 0$。因此

$$c_{q_i^{\alpha_i}}(n) = \frac{\varphi(q_i^{\alpha_i}) \mu(q_i^{\alpha_i}/(q_i^{\alpha_i}, n))}{\varphi(q_i^{\alpha_i}/(q_i^{\alpha_i}, n))}。\tag{6}$$

因为 $\mu(m/(m, n))$ 与 $\varphi(m/(m, n))$ 都是 m 的积性函数，所以由(5)与(6)可得

$$c_q(n) = \frac{\varphi(q) \mu(q/(q, n))}{\varphi(q/(q, n))}。$$

证毕。

下面的这个结果是关于特征和估计的。

定理 1.2.4 设 $q \geqslant 3$, $\chi(n)$ 为模 q 的一个原特征, M 为任一正整数,则

$$\left|\sum_{n \leqslant M} \chi(n)\right| < 2\sqrt{q}\log q。$$

证明: 由定理 1.2.3 的(i) 与(ii) 可知

$$\bar{\chi}(n) = \frac{1}{\tau(\chi)}\left(\sum_{1 \leqslant a \leqslant q} \chi(a) e\left(\frac{na}{q}\right)\right),$$

其中 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$, $e(\xi) = e^{2\pi i\xi}$。因此,

$$\sum_{n \leqslant M} \bar{\chi}(n) = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \chi(a)\left(\sum_{n \leqslant M} e\left(\frac{na}{q}\right)\right)。 \tag{7}$$

由等比级数的求和可知

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant M} e\left(\frac{na}{q}\right) = \frac{e(a/q)(1 - e(Ma/q))}{1 - e(a/q)}。 \tag{8}$$

因为

$$\left|1 - e\left(\frac{a}{q}\right)\right| = \left|e\left(-\frac{a}{2q}\right) - e\left(\frac{a}{2q}\right)\right| = 2\left|\sin\frac{a\pi}{q}\right|,$$

而若 $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,则易证(通过求导)

$$\frac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta,$$

所以,若在(7) 两边取绝对值,则由(8) 可得(将求和分成 $a \leqslant \frac{q}{2}$ 与 $a > \frac{q}{2}$ 两部分,并应用 $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n \leqslant M} \bar{\chi}(n)\right| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leqslant a \leqslant q-1} \frac{2}{2|\sin(a\pi/q)|} \\ &\leqslant \sqrt{q}\left(\sum_{1 \leqslant a \leqslant q/2} \frac{1}{a}\right)。\end{aligned} \tag{9}$$

若 $\xi > 1$,则

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant \xi} \frac{1}{a} \leqslant 1 + \int_1^{\xi} \frac{1}{u} du = 1 + \log\xi。$$

于是，由式(9)可知本定理成立。**证毕**。

练　　习

（Ⅰ）应用定理1.2.2的(i)与(iv)证明，若 $q = 2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式，$\alpha \geqslant 3$，则模 q 的任一个特征函数 $\chi(n)$ 形如

$$\chi(n) = \begin{cases} (-1)^{m_1\alpha(n)} e\left(\dfrac{m_2\beta(n)}{2^{\alpha-2}}\right) \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant r} e\left(\dfrac{k_i v_i(n)}{\varphi(p_i^{\alpha_i})}\right), & \text{若}(n,q) = 1, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中 $(m_1, m_2, k_1, \cdots, k_r)$ 为任一组满足

$$0 \leqslant m_1 \leqslant 1, 1 \leqslant m_2 \leqslant 2^{\alpha-2}, 1 \leqslant k_i \leqslant \varphi(p_i^{\alpha_i})$$

的整数，$\alpha(n)$ 及 $\beta(n)$ 为由引理1.2.1的(i)中确定的函数，$v_i(n)$ 为 n 相对于模 $p_i^{\alpha_i}$ 的某个指定的原根 g_i 的指数。类似地，考虑 $q = 2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$\alpha = 0,1,2$ 时的特征函数的形式。

（Ⅱ）若 p 为奇素数，证明模 p 具有唯一的实原特征。

§ 1.3　L 函数的函数方程

设 $a(n)$ 和 $\lambda(n)$ 为二个积性函数，$\lambda(n) > 0$，而当 $n \to \infty$ 时 $\lambda(n) \to \infty$，并设无穷级数

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s}$$

当 $\mathrm{Re}s = \sigma > \sigma_0 \geqslant 1$ 时绝对收敛。设 s 为任一复数，$\mathrm{Re}s = \sigma > \sigma_0$。若 n 的标准素因子分解式为 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，则

$$\frac{a(n)}{(\lambda(n))^s} = \prod_{i=1}^{r} \frac{a(p_i^{\alpha_i})}{(\lambda(p_i^{\alpha_i}))^s}。$$

因此,若设 X 与 Y 为充分大正数,则

$$F(s)-\prod_{p\leqslant X}\left(\sum_{0\leqslant r\leqslant Y}\frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s}\right)=\sum_n{}'\frac{a(n)}{(\lambda(n))^s},$$

其中计数于 $\sum_n{}'$ 中的每个 n,或者它有素因子大于 X,从而 $n>X$,或者它的素因子都小于 X,但至少有一个素因子 p 及一个整数 $\alpha,\alpha>Y$,使得 $p^\alpha|n$,从而 $n>2^Y$。于是

$$\left|\sum_n{}'\frac{a(n)}{(\lambda(n))^s}\right|\leqslant\sum_{n>X}\frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma}+\sum_{n>2Y}\frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma}。$$

令 $Y\to\infty$,得

$$F(s)-\prod_{p\leqslant X}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s}\right)=O\left(\sum_{n>X}\frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma}\right)。$$

再令 $X\to\infty$,则得

$$F(s)=\prod_{p\geqslant 2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s}\right)。$$

我们注意到,若对于每个素数 p,当 $\sigma>\sigma_0$ 时 $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma}<+\infty$,并且极限

$$\prod_{p\geqslant 2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma}\right)=\lim_{X\to\infty}\prod_{p\leqslant X}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma}\right)$$

存在,则上面的讨论实际上已给出(注意:$\lambda(1)=a(1)=1$)

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma}\leqslant\prod_{p\leqslant X}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma}\right)\leqslant\prod_{p\geqslant 2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma}\right),$$

因此,令 $X\to\infty$,可知无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a(n)}{(\lambda(n))^s}$ 当 $\mathrm{Re}s=\sigma>\sigma_0$ 时是绝对收敛的。于是,我们有

引理 1.3.1　若 $a(n)$ 及 $\lambda(n)$ 为积性函数,$\lambda(n)>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(n)=0$,且当 $\sigma>\sigma_0\geqslant 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{(\lambda(n))^\sigma}<+\infty\text{ 或}\prod_{p\geqslant 2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma}\right)<+\infty,$$

则当 $\mathrm{Re}s > \sigma_0$ 时,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s} = \prod_{p\geqslant 2}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s}\right)。$$

当 χ 为模 q 的任一特征,$q \geqslant 1, a(n) = \chi(n)$ 及 $\lambda(n) = n$ 时,我们称 $F(s)$ 为 L 函数,记为 $L(s,\chi)$。特别地,若 $q = 1, \chi(n) = 1(n \geqslant 1)$,则称 $F(s)$ 为 ζ 函数,记为 $\zeta(s)$。由于当 X 充分大且 $\sigma > 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant X} n^{-\sigma} &= 1 + \sum_{2\leqslant n\leqslant X} n^{-\sigma} \leqslant 1 + \sum_{2\leqslant n\leqslant X}\int_{n-1}^{n} u^{-\sigma}\mathrm{d}u \\ &\leqslant 1 + \int_1^X u^{-\sigma}\mathrm{d}u = \frac{\sigma}{\sigma - 1} - \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma - 1} < \frac{\sigma}{\sigma - 1},\end{aligned}$$

所以 $L(s,\chi)$ 与 $\zeta(s)$ 当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时都绝对收敛,且由引理 1.3.1 可得

$$L(s,\chi) = \prod_{p}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi(p^r)}{p^{rs}}\right) = \prod_{p}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$$\zeta(s) = \prod_{p}\left(\sum_{r=0}^{\infty} p^{-rs}\right) = \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}。$$

应用下面的引理 1.3.4,不难验证 $L(s,\chi)$ 与 $\zeta(s)$ 都是开集 $\{s \mid \mathrm{Re}s > 1\}$ 上的解析函数。我们将证明当 $\chi \neq \chi_0$ 时,$L(s,\chi)$ 可解析开拓为全平面上的解析函数,而 $\zeta(s)$ 则可解析开拓为全平面上除孤立奇点 $s = 1$ 外处处解析的函数,且 $\zeta(s)$ 以 $s = 1$ 为一阶极点。

引理 1.3.2　设实函数 $g(\varphi)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积,λ 为非零实数,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(\varphi)\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0。$$

证明:因为 g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积,所以 g 有界,且在 $[a, b]$ 上绝对可积。设 $n > 1$,$[a, b]$ 的 n 等分为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b, x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}。$$

又设 $\sup\limits_{\varphi\in[x_i,x_{i+1}]} g(\varphi) = K_i$, $\inf\limits_{\varphi\in[x_i,x_{i+1}]} g(\varphi) = k_i, 0 \leqslant i \leqslant n$。则

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(\varphi)\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi\right| &= \left|\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(\varphi)\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi\right| \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(g(\varphi)-k_i)\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi + k_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi\right| \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|g(\varphi)-k_i|\mathrm{d}\varphi + \frac{2}{|\lambda|}\Big(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|k_i|\Big) \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant n}(K_i-k_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) + \frac{2}{|\lambda|}\Big(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|k_i|\Big)。 \qquad (1)
\end{aligned}$$

因为 $g(\varphi)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,所以当 $n\to\infty$ 时,

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n}(K_i-k_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)\to 0。$$

因此,任给 $\varepsilon > 0$,都存在 $N = N(\varepsilon)$,使得 $n \geqslant N(\varepsilon)$ 时,(1) 式右边第一个求和 $< \frac{\varepsilon}{2}$。无妨取 $n = [N(\varepsilon)] + 1$。当 n 取定时,可知存在 $\lambda(\varepsilon) > 0$,当 $\lambda > \lambda(\varepsilon)$ 时,(1) 式右边第二个加项 $< \frac{\varepsilon}{2}$。则当 $\lambda > \lambda(\varepsilon)$ 时

$$\left|\int_a^b g(\varphi)\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi\right| < \varepsilon,$$

所以按定义可知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(\varphi)\sin(\lambda\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0。$$

证毕。

引理 1.3.3 设 x 与 α 为实数, $x > 0$,则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = \sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x + 2\pi i n\alpha}。 \qquad (2)$$

证明:显然,(2) 式两端的无穷级数都是绝对收敛的,且(2) 式两端都是 α 的周期为 1 的函数。因此,为证此引理,我们仅需考

虑 $0 \leqslant \alpha < 1$。事实上,我们只要就 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 的情形证明(2)式,因为若 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$,则 $0 < 1 - \alpha < \frac{1}{2}$,而我们看到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(1-\alpha+n)^2\pi/x}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x+2\pi in\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x-2\pi in\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x+2\pi in(1-\alpha)},$$

所以由关于 $1 - \alpha$ 的(2)的相应等式可知此时(2)式对于 α 仍成立。设 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$。令

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}。$$

下面我们寻求 $f(\alpha)$ 的 Fourier 级数展开式。对于充分大的正整数 M,考虑部分和

$$S_M(f,\alpha) = \sum_{|m| \leqslant M} a_m e(m\alpha),$$

这里 $a_m = \int_0^1 f(u)e(-um)\mathrm{d}u$,而对于实数 ξ,$e(\xi) = \exp(2\pi i\xi)$。由等比级数求和,当 $0 \leqslant u \leqslant 1$ 且 $u \neq \alpha$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{|m| \leqslant M} e(m(\alpha - u)) &= \frac{e(-M(\alpha - u))(1 - e((\alpha - u)(2M + 1)))}{1 - e(\alpha - u)} \\ &= \frac{e\left(-(M + \frac{1}{2})(\alpha - u)\right) - e\left((M + \frac{1}{2})(\alpha - u)\right)}{e\left(-\frac{1}{2}(\alpha - u)\right) - e\left(\frac{1}{2}(\alpha - u)\right)} \\ &= \frac{\sin(2\pi(M + \frac{1}{2})(\alpha - u))}{\sin(\pi(\alpha - u))}。\end{aligned} \tag{3}$$

因为 $\lim_{\xi\to 0}\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$,我们可将 $\alpha = u$ 看成(3)的极限情况。这么一来,(3)就对所有的 $u \in [0,1]$ 都成立了。我们由此得

$$S_M(f,\alpha) = \int_0^1 f(u)\cdot\frac{\sin\left[2\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)(\alpha-u)\right]}{\sin[\pi(\alpha-u)]}\mathrm{d}u。$$

因为(设 n 为整数)

$$\int_0^1 e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = \begin{cases}0, & n\neq 0,\\ 1, & n=0,\end{cases}$$

所以由(3)又有

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \sum_{|m|\leqslant M}\left(\int_0^1 f(\alpha)e(-mu)\mathrm{d}u\right)e(m\alpha)\\ &= \int_0^1 f(\alpha)\cdot\frac{\sin\left[2\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)(\alpha-u)\right]}{\sin[\pi(\alpha-u)]}\mathrm{d}u。\end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned}S_M(f,\gamma)-f(\alpha) &= \int_0^1 (f(u)-f(\alpha))\frac{\sin\left(2\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)(\alpha-u)\right)}{\sin(\pi(\alpha-u))}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\alpha (f(\alpha)-f(\alpha-\varphi))\cdot\frac{\sin\left(2\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin(\pi\varphi)}\mathrm{d}\varphi\\ &\quad+\int_0^{1-\alpha}(f(\alpha+\varphi)-f(\alpha))\cdot\frac{\sin(2\pi\left(M+\frac{1}{2}\right)\varphi)}{\sin(\pi\varphi)}\mathrm{d}\varphi。\end{aligned}\tag{4}$$

当 $0<\varphi\leqslant\frac{1}{2}$ 时,我们令

$$\begin{aligned}g(\varphi) = \frac{f(\alpha)-f(\alpha-\varphi)}{\sin(\pi\varphi)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}-e^{-(n+\alpha-\varphi)^2\pi/x}}{\sin(\pi\varphi)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n(\varphi)。\end{aligned}$$

对每个整数 n,令

$$g_n = \lim_{\xi\to 0+}g_n(\xi) = -\frac{n+\alpha}{x}e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}, g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n。$$

则我们断言:函数 $g(\varphi)$ 在$[0,\alpha]$上连续。为此,我们仅证明 $g(\varphi)$

在 $\varphi=0$ 处连续，因为可类似证明 $g(\varphi)$ 在其他点 $\varphi\in(0,\alpha]$ 处也连续。级数 $g(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n(\varphi)$ 在 $(0,\alpha]$ 上是绝对收敛的，因为

$$|g_n(\varphi)| = e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}\frac{1}{\sin\pi\varphi}\left|e^{(-\varphi^2+2\varphi(n+\alpha))\pi/x}-1\right|$$

$$=\frac{e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}}{\sin(\pi\varphi)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left((\varphi^2-2\varphi(n+\alpha))\frac{\pi}{x}\right)^k。$$

所以，由 $\sin(\pi\varphi)\geqslant 2\varphi$（注意：$0<\varphi\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$）可得

$$|g_n(\varphi)|\leqslant\frac{1}{2}e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left((\alpha+2|n+\alpha|)\frac{\pi}{x}\right)^k$$

$$\leqslant\frac{1}{2}e^{(\alpha+2|n+\alpha|-|n+\alpha|^2)\pi/x}。$$

故 $g(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n(\varphi)$ 是绝对收敛的。因此，任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)>0$，使得

$$\sum_{|n|>N}(|g_n(\varphi)|+|g_n|)<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $\varphi\in(0,\alpha]$ 成立。又由于 $\lim_{\xi\to0+}g_n(\xi)=g_n$，对每个整数 n，$|n|\leqslant N$，必存在 $\delta_n>0$，使当 $0<\varphi<\delta_n$ 时，

$$|g_n(\varphi)-g_n|<\frac{\varepsilon}{6N}。$$

故存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当 $0<\varphi<\delta$，$|n|\leqslant N$ 时，

$$|g_n(\varphi)-g_n|<\frac{\varepsilon}{6N}$$

总成立。由此可得

$$\left|\sum_{|n|\leqslant N}g_n(\varphi)-\sum_{|n|\leqslant N}g_n\right|\leqslant\sum_{|n|\leqslant N}|g_n(\varphi)-g_n|<(2N+1)\cdot\frac{\varepsilon}{6N}<\frac{\varepsilon}{2}。$$

所以，当 $0<\varphi<\delta$ 时，

$$|g(\varphi)-g(0)|\leqslant\left|\sum_{|n|\leqslant N}(g_n(\varphi)-g_n)\right|$$

$$+\sum_{|n|>N}(|g_n(\varphi)|+|g_n|)<\varepsilon,$$

因此可知 $g(\varphi)$ 在 $\varphi=0$ 处连续。类似可证 $g(\varphi)$ 在其他点 $\varphi\in[0,\alpha]$ 处连续,故 $g(\varphi)$ 在 $[0,\alpha]$ 上连续。这样,由引理 1.3.2 立即可知(4)式右边第一个积分当 $M\to\infty$ 时趋于零,而同理可证(4)式右边第二个积分当 $M\to\infty$ 时也趋于零。由此我们得到

$$f(\alpha)=\lim_{M\to\infty}S_M(f,\alpha)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e(m\alpha)。\tag{5}$$

我们有

$$\begin{aligned}a_m&=\int_0^1 f(u)e(-mu)\mathrm{d}u=\int_0^1\Big(\sum_{|n|\leqslant N}e^{-(n+u)^2\pi/x}\\&\quad+\sum_{|n|>N}e^{-(n+u)^2\pi/x}\Big)e(-mu)\mathrm{d}u\\&=\sum_{|n|\leqslant N}\int_0^1 e^{-(n+u)^2\pi/x-2\pi imu}\mathrm{d}u+O\Big(\sum_{|n|>N}\frac{x}{n^2\pi}\Big)\\&=\sum_{|n|\leqslant N}\int_n^{n+1}e^{-u^2\pi/x-2\pi imu}\mathrm{d}u+O\Big(\frac{x}{N}\Big)\\&=e^{-\pi m^2x}\int_{-N}^{N+1}e^{-\frac{\pi}{2}(u+imx)^2}\mathrm{d}u+O\Big(\frac{x}{N}\Big)。\end{aligned}$$

无妨设 $m>0$。由残数定理我们有

$$\int_L e^{-\frac{\pi}{2}z^2}\mathrm{d}z=0,$$

这里 L 是由复 z 平面上端点为 $(N+1,0)$, $(N+1,mx)$, $(-N,mx)$ 及 $(-N,0)$ 的矩形所构成的积分路径。所以

$$\int_{-N}^{N+1}e^{-\frac{\pi}{2}(u+imx)^2}\mathrm{d}u=R_1+R_2+R_3,$$

这里 R_1,R_2 与 R_3 是分别沿着从 $(-N,mx)$ 至 $(-N,0)$,从 $(-N,0)$ 到 $(N+1,0)$,和从 $(N+1,0)$ 到 $(N+1,mx)$ 这三条边所取的积分。我们有

$$|R_1| = O\left(\left|\int_0^{mx} e^{-\frac{\pi}{x}(-N+it)^2}\mathrm{d}t\right|\right) = O(e^{-\frac{\pi}{x}(N-mx)^2}mx),$$

$$R_2 = \int_{-N}^{N+1} e^{-\frac{\pi}{2}u^2}\mathrm{d}u,$$

$$R_3 = O\left(\left|\int_0^{mx} e^{-\frac{\pi}{x}(N+1+it)^2}\mathrm{d}t\right|\right) = O(mx \cdot e^{-\frac{\pi}{x}(N+1-mx)^2})。$$

因此，令 $N \to \infty$ 可得

$$a_m = e^{-\pi m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}u^2}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \cdot e^{-\pi m^2}\int_0^{\infty} e^{-v^2}\mathrm{d}v。\qquad (6)$$

任给 $\varepsilon > 0$。我们有

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-v^2}\mathrm{d}v\right)^2 = \iint_{D(\varepsilon)} e^{-(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + O(\varepsilon),$$

这里

$$D(\varepsilon) = \{(u,v) \mid u \geqslant 0, v \geqslant 0, u^2 + v^2 \geqslant \varepsilon^2\}。$$

作变量替换 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta, r \geqslant \varepsilon, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，可知

$$\iint_{D(\varepsilon)} e^{-u^2-v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}e^{-\varepsilon^2}。$$

因此，令 $\varepsilon \to 0$ 可得

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2}\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{\pi}}{2}。\qquad (7)$$

由(5) ~ (7)，可知引理 1.3.3 在 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时成立。接下去，与前面证明函数 $g(\varphi)$ 连续类似地，可知(2) 式左右两边的函数都在 $\alpha = 0$ 处连续。因此，由已证明的结果，令 $\alpha \to 0^+$ 可知(2) 式在 $\alpha = 0$ 处也成立。再由我们的说明就可知引理 1.3.3 对一切实数 α 都成立。**证毕**。

引理 1.3.4　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 当 $|\alpha - \alpha_0| \leqslant \delta$ 时收敛，每个函数 $F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导，且对任意的 $\delta_1, 0 < |\delta_1| < \delta$，存在

与 n 无关的常数 C_1 及 C_2,使得

$$|F_n(\alpha_0+\delta_1)-F_n(\alpha_0)|\leqslant C_1|\delta_1 f_n|,$$

$$|F_n'(\alpha_0)|\leqslant C_2|f_n|,\sum_{n\geqslant 1}|f_n|<\infty,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}F_n(\alpha)$ 作为 α 的函数在 $\alpha=\alpha_0$ 处可导,且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}F_n(\alpha)\right)'\bigg|_{\alpha=\alpha_0}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n'(\alpha_0)。$$

(注意:$\alpha_0,\alpha,\delta_1,F_n(\alpha)$ 及 f_n 都允许取复值)。

证明:令

$$F(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(\alpha)。$$

任给 $\varepsilon>0$,设 $0<|\Delta|<\delta$,则

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(\alpha_0+\Delta)-F(\alpha_0)}{\Delta}-\sum_{n=1}^{\infty}F_n'(\alpha_0)\right|\\ \leqslant&\sum_{n\leqslant N}\left|\frac{F_n(\alpha_0+\Delta)-F_n(\alpha_0)}{\Delta}-F_n'(\alpha_0)\right|\\ &+\sum_{n>N}\left|\frac{F_n(\alpha_0+\Delta)-F_n(\alpha_0)}{\Delta}\right|+\sum_{n>N}|F_n'(\alpha_0)|。\end{aligned}$$

由假设条件可知

$$\left|\frac{F_n(\alpha_0+\Delta)-F_n(\alpha_0)}{\Delta}\right|\leqslant C_1|f_n|,|F_n'(\alpha_0)|\leqslant C_2|f_n|。$$

因为 $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|<\infty$,故存在充分大的 $N_0(\varepsilon)$,当 $N=N_0(\varepsilon)$ 时,

$$\sum_{n>N}\left(\left|\frac{F_n(\alpha_0+\Delta)-F_n(\alpha_0)}{\Delta}\right|+|F_n'(\alpha_0)|\right)<\frac{\varepsilon}{2}。$$

对每个正整数 $n,n\leqslant N$,因为 $F_n(\alpha)$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处可导,由定义可知存在充分小正数 $\Delta_n,\Delta_n<\delta$,当 $0<|\Delta|<\Delta_n$ 时,

$$\left|\frac{F_n(\alpha_0+\Delta)-F_n(\alpha_0)}{\Delta}-F_n'(\alpha_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2N}。$$

因此,当 $0 < |\Delta| < \min\limits_{n\leqslant N}\Delta_n = \delta_1(\varepsilon)$ 时,

$$\sum_{|n|\leqslant N}\left|\frac{F_n(\alpha_0+\Delta)-F_n(\alpha_0)}{\Delta}-F_n'(\alpha_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{F(\alpha_0+\Delta)-F(\alpha_0)}{\Delta}-\sum_{n\geqslant 1}F_n'(\alpha_0)\right|<\varepsilon。$$

这样,由定义就知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(\alpha)$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处可导,且

$$F'(\alpha_0)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n'(\alpha_0)。$$

证毕。

有了这些准备,我们可来建立 L 函数与 ζ 函数的函数方程。

定理 1.3.5　(i) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。设 χ 为模 q 的原特征,若 $\chi(-1)=1$,则 $\delta=0$,若 $\chi(-1)=-1$,则 $\delta=1$。对于 $u\geqslant 1$,令

$$F(u,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)m^{\delta}e^{-\pi m^2u/q}。$$

则

$$\xi(s,\chi)=\frac{i^{\delta}q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty}u^{\frac{1}{2}(\delta-1-s)}F(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}u^{\frac{1}{2}(\delta+s)-1}F(u,\chi)\mathrm{d}u$$

为一个整函数,并满足

$$\xi(s,\chi)i^{\delta}q^{\frac{1}{2}}=\tau(\chi)\xi(1-s,\overline{\chi}),$$

其中 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和。在 $\mathrm{Re}s>1$ 时定义 L 函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

则 $L(s,\chi)$ 可解析开拓成为整函数(解析开拓后的函数仍记为 $L(s,\chi)$),解析开拓后的 $L(s,\chi)$ 以 $s=-\delta-2n$ 为平凡的零点,n 为任意非负整数,且满足

$$\xi(s,\chi)=\begin{cases}L(s,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right),\\ \qquad 若\ s\neq-\delta-2n,n\ 为任意非负整数,\\ \lim\limits_{s\to\delta-2n}(L(s,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma(\frac{1}{2}(s+\delta))),\\ \qquad 若\ s=-\delta-2n,n\ 为某个非负整数。\end{cases}$$

(ii) 令

$$\xi(s)=s(s-1)\left(\int_1^\infty(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+u^{\frac{s}{2}-1})\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2u}\right)\mathrm{d}u\right)+1,$$

则 $\xi(s)$ 为一个整函数,满足

$$\xi(s)=\xi(1-s)。$$

在 $\mathrm{Re}s>1$ 时定义 ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty n^{-s},$$

则 $\zeta(s)$ 可解析开拓成为全平面上以 $s=1$ 为唯一极点、相应残数为 1 的亚纯函数(解析开拓后的函数仍记为 $\zeta(s)$),它以 $-2n$ 为平凡的零点,n 为任意正整数,并满足

$$\xi(s)=\begin{cases}2(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right),\\ \qquad 若\frac{1}{2}s\ 不为负整数,s\neq1,\\ 2\lim\limits_{s\to-2n}((s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(\frac{1}{2}s+1)),\\ \qquad 若\frac{1}{2}s=-n,n\ 为正整数,\\ 1,\quad 若\ s=1。\end{cases}$$

证明:(i) 当 χ 为模 q 的原特征时,由于$(\chi(-1))^2=\chi(1)=1$,所以 $\chi(-1)=1$ 或 -1。先考虑 $\chi(-1)=1$ 的情形,这时 $\delta=0$。设 s 为复数,$\mathrm{Re}\ s=\sigma>5$。由 §1.1 我们有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x。$$

对于每个正整数 n，作变量替换 $x=n^2\pi y/q$，可得

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\left(\frac{n^2\pi}{q}\right)^{\frac{s}{2}}\int_0^{\infty}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-yn^2\pi/q}\mathrm{d}y,\tag{8}$$

所以，按定义有

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}n^{-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)=\int_0^{\infty}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-yn^2\pi/q}\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}a(\varepsilon,n)+\lim_{M\to+\infty}b(M,n),$$

这里

$$a(\varepsilon,n)=\int_{\varepsilon}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y,\ b(M,n)=\int_1^{M}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y。$$

因此，设 N 为一个正整数，$0<\varepsilon<1/N$，$M>N$，N 充分大，使得当 $y\geqslant N$ 时

$$y^{\frac{\sigma}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}<e^{-y}。$$

则

$$a(\varepsilon,n)=\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y+\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{N}}y^{\frac{s}{2}-1}y^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y+O\left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{N}}y^{\frac{\sigma}{2}-1}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y+O(N^{-\frac{\sigma}{2}}),$$

$$b(M,n)=\int_1^{N}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y+\int_N^{M}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2/q}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^{N}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2}\mathrm{d}y+O\left(\int_N^{M}e^{-y/q}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_1^{N}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-y\pi n^2}\mathrm{d}y+O(e^{-N/q})。$$

因此

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} n^{-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^{1} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} \mathrm{d}y + \int_{1}^{N} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} \mathrm{d}y + O(N^{-\frac{\sigma}{2}} + e^{-N}), \tag{9}$$

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\chi(n)n^{-s}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^{1} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\chi(n)e^{-y\pi n^2/q}\right)\mathrm{d}y + \int_{1}^{N} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\chi(n)e^{y\pi n^2/q}\right)\mathrm{d}y + O(N^{1-\frac{\sigma}{2}} + Ne^{-N})。 \tag{10}$$

当 $y > 0$ 时，$e^{-y\pi n^2/q} < \frac{q}{n^2\pi y}$，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-y\pi n^2/q}$$

对于 $y \in [1/N, N]$ 是一致收敛的，且因每个加项都为 $[1/N, N]$ 上 y 的连续函数，这个收敛的级数就代表 $[1/N, N]$ 上的连续函数。由于

$$\sum_{n>N} e^{-y\pi n^2/q} \leqslant e^{-y\pi/q}\sum_{n>N} e^{-y\pi n^2/(2q)} \leqslant e^{-y\pi/q}\sum_{n\geqslant N}\frac{2q}{y\pi n^2} = O\left(e^{-y\pi/q}\cdot\frac{q}{yN}\right), \tag{11}$$

所以由(10)可得

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\chi(n)n^{-s}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^{1} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-y\pi n^2/q}\right)\mathrm{d}y + \int_{1}^{N} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-y\pi n^2/q}\right)\mathrm{d}y + O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{12}$$

其中 O 常数与 q 及 σ 有关。由定理 1.2.3 的(i)可知

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e\left(\frac{an}{q}\right),$$

所以，当 $1/N \leqslant y \leqslant 1$ 时，由引理 1.3.2 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,e^{-y\pi n^2/q} = \frac{1}{2\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-y\pi n^2/q+2\pi ian/q}$$

$$= \frac{1}{2\tau(\overline{\chi})} \cdot \sqrt{\frac{q}{y}} \cdot \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(m+a/q)^2 \pi q/y}。\quad (13)$$

因为每个整数 n 可以唯一地表为 $n = a + mq, 1 \leqslant a \leqslant q, m$ 为整数,因此由 $\chi(\cdot)$ 的周期性可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} = \frac{1}{2\tau(\overline{\chi})} \cdot \sqrt{\frac{q}{y}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(n) e^{-\pi n^2 q/y},$$

$$\int_{\frac{1}{N}}^{1} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q}\right) \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{q}}{2\tau(\overline{\chi})} \int_{\frac{1}{N}}^{1} y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(n) e^{-\pi n^2/qy}\right) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{2\tau(\overline{\chi})} \int_{1}^{N} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(n) e^{-\pi u n^2/q}\right) \mathrm{d}u。\quad (14)$$

由(10) 及(14) 我们得

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N} \chi(n) n^{-s}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{2\tau(\overline{\chi})} \int_{1}^{N} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\chi}(n) e^{-\pi u n^2/q}\right) \mathrm{d}u$$

$$+ \int_{1}^{N} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q}\right) \mathrm{d}y + O\left(\frac{1}{N}\right)。\quad (15)$$

当 $y \geqslant 1$ 时,与(11) 类似地有估计

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} = O(q e^{-\pi y/q})。\quad (16)$$

设 $M'' > M' > 0, M'$ 充分地大,使得当 $y \geqslant M'$ 时,$e^{\pi y/2q} > y^{\frac{\sigma}{2}-1}$。则

$$\left|\int_{M'}^{M''} y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q}\right) \mathrm{d}y\right|$$

$$= O\left(\int_{M'}^{M''} q e^{\pi y/2q} \mathrm{d}y\right) = O(q^2 e^{-\pi M'/2q})。$$

由此及定义,可知当 $N \to \infty$ 时(15) 右端第二个积分的极限存在。类似地可知(15) 右端第一项中的积分在 $N \to \infty$ 时极限也存在。在(15) 中令 $N \to \infty$,当 $\mathrm{Re}s > 5$ 时就得到(利用 $\chi(-1) = 1$)

$$L(s,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{q}}{\tau(\overline{\chi})} \int_{1}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} F(u, \overline{\chi}) \mathrm{d}u$$

$$+\int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} F(u,\chi)\mathrm{d}u, \tag{17}$$

这里

$$F(u,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\pi u n^2/q}。$$

由(16)可知当 $u \geqslant 1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-u\pi n^2/q} = O(qe^{-\pi u/q}),$$

并且若 σ 是任意实数，u 充分大，则有

$$u^{-\frac{1}{2}+\frac{|\sigma|}{2}} \leqslant e^{\pi u/(2q)},$$

所以由引理 1.1.1 的(ii)可知函数

$$\xi(s,\chi) = \frac{\sqrt{q}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} F(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u + \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} F(u,\chi)\mathrm{d}u \tag{18}$$

是一个整函数。由定理 1.1.5 的(i)及(ii)可知：$\Gamma(s)$ 在全复平面上除去极点 $s=0,-1,-2,\cdots$ 外处处解析，且 $\Gamma(s)$ 处处不为零。令

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(s)}, & \text{若 } s \text{ 不为非负整数}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

我们要说明：$g(s)$ 是一个整函数。显然，若 z 不为非负整数，则 $g(s)$ 在 $s=z$ 处可导。若 z 为非负整数，设 $z=-m, m \geqslant 0$。当 $0<|s+m|<\frac{1}{2}$ 时，$s \neq -m$ 且 $0 \leqslant |\mathrm{Re}s+m| < \frac{1}{2}$。由定理 1.1.5 的(i)、(ii)及(iii)可得

$$g(s) = \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}{\Gamma(s+m+1)}。$$

因此根据定义可验证 $g(s)$ 在 $s=-m$ 处也可导。所以 $g(s)$ 是一个整函数。对所有的复数 s，我们定义一个整函数 $\lambda(s,\chi)$ 为

$$\lambda(s,\chi) = \xi(s,\chi)g\left(\frac{1}{2}s\right)(q\pi^{-1})^{-\frac{s}{2}}。$$

由(17) 及(18) 可知当 $\mathrm{Re}s > 5$ 时,$\lambda(s,\chi) = L(s,\chi)$。因此 $\lambda(s,\chi)$ 可视为 $L(s,\chi)$ 在全平面上的解拓开拓。由解析函数的性质可知,$L(s,\chi)$ 在全 s 平面上的解析开拓是唯一的。对于非负整数 m,由 $g(-m) = 0$ 可知 $\lambda(-2m,\chi) = 0$,故解析开拓后的 $L(s,\chi)$ 以 $0, -2, -4,\cdots$ 为零点。通常仍将 $\lambda(s,\chi)$ 记为 $L(s,\chi)$。若在(18) 中以 $1-s$ 代 s,并以 $\overline{\chi}$ 代 χ,则得到

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\int_1^\infty u^{-1+\frac{s}{2}}F(u,\chi)\mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}F(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u。 \tag{19}$$

由定理 1.2.3 的(ii) 可知 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$,所以 $\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = q$,而因为 $\chi(-1) = 1$,所以

$$\overline{\tau(\chi)} = \sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e\left(-\frac{a}{q}\right) = \sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(-a)e\left(-\frac{a}{q}\right) = \tau(\overline{\chi}),$$

由此可得 $\dfrac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} = \dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}$。因此,由(18) 与(19) 我们得

$$\xi(s,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\xi(1-s,\overline{\chi})。 \tag{20}$$

此即 L 函数的函数方程,其中 χ 是模 q 的满足 $\chi(-1) = 1$ 的原特征。以下设 χ 是模 q 的满足 $\chi(-1) = -1$ 的原特征。由(8) 可得,当 $\mathrm{Re}s > 5$ 时,

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}n^{1-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1}ne^{-yn^2\pi/q}\mathrm{d}y。$$

由此出发,应用不等式 $n \leqslant \dfrac{2q}{y\pi}e^{y\pi n/2q}$ 及若干熟知的估计,对任一充分大整数 N,可与(12) 类似地得到

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\chi(n)n^{1-s}\right)(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\chi(n)e^{-yn^2\pi/q}\right)\mathrm{d}y$$

$$+\int_1^N y^{\frac{s}{2}-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-yn^2\pi/q}\Big)\mathrm{d}y + O(N^{-1/2}) \tag{21}$$

接下去,应用

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\chi(n)e^{-y\pi n^2/q} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\chi(n)e^{-y\pi n^2/q},$$

与(13)类似地,对于 $1/N\leqslant y\leqslant 1$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-y\pi n^2/q} = \frac{1}{2\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)\sum_{n=-\infty}^{\infty} ne^{-y\pi n^2/q+2\pi ian/q}。\tag{22}$$

在引理 1.3.3 中,设 $-2<\alpha<2, x=y/q$。由

$$(e^{-(n+\alpha)^2\pi/x})'_\alpha = -\frac{2\pi}{x}(n+\alpha)e^{-(n+\alpha)^2\pi/x},$$

$$(e^{-n^2\pi x+2\pi in\alpha})'_\alpha = 2\pi ine^{-n^2\pi x+2\pi in\alpha},$$

我们可应用引理1.3.4,分别对(2)式左边和右边的 α 的函数逐项求导,然后令 $\alpha=\alpha_0=a/q$,就得到

$$ix^{-3/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+\alpha)e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ne^{-n^2\pi x+2\pi in\alpha}。$$

由此可知当 a 固定时(22)式右端对 n 的求和为

$$i\Big(\frac{y}{q}\Big)^{-3/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+a/q)e^{-(n+a/q)^2q\pi/y}。$$

因为每个整数 m 可唯一地表为 $m=nq+a, 1\leqslant a\leqslant q, n$ 为整数,所以,当 $1/N\leqslant y\leqslant 1$ 时,由(22)得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-yn^2\pi/q} &= \Big(\frac{q}{y}\Big)^{\frac{3}{2}}\frac{i}{2\tau(\overline{\chi})}\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+a/q)e^{-(n+a/q)^2\pi q/y}\\ &= q^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{i}{2\tau(\overline{\chi})}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\overline{\chi}(m)e^{-m^2\pi x/qy}\\ &= i\frac{q^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\overline{\chi}(m)e^{-m^2\pi x/qy}。\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\frac{1}{N}}^{1} y^{s/2-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-y\pi n^2/q}\Big)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^N u^{1/2-s/2}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m\overline{\chi}(m)e^{-m^2\pi u/q}\Big)\mathrm{d}u。\qquad(23)$$

由(21)及(23)可得

$$\Big(\sum_{n=1}^{N}\chi(n)n^{1-s}\Big)(q\pi^{-1})^{s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^N u^{1/2-s/2}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m\,\overline{\chi}(m)e^{-m^2\pi u/q}\Big)\mathrm{d}u$$

$$+\int_1^N y^{s/2-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-y\pi n^2/q}\Big)\mathrm{d}y+O(N^{-1/2})。\qquad(24)$$

可与证明(15)式右端的两个积分当 $N\to\infty$ 时收敛类似地，证明(24)式右端的两个积分在 $N\to\infty$ 时也收敛。因此，在(24)中令 $N\to\infty$，得

$$L(s-1,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}G(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u$$

$$+\int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}G(u,\chi)\mathrm{d}u,\qquad(25)$$

其中 $\mathrm{Re}s>5$，

$$G(u,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty} m\chi(m)e^{-m^2\pi u/q}。$$

当 $\mathrm{Re}s>5$ 时，将(25)中的 s 换成 $s+1$，可得

$$L(s,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+1)}\Gamma\Big(\frac{1}{2}(s+1)\Big)=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} u^{-\frac{s}{2}}G(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u$$

$$+\int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}G(u,\chi)\mathrm{d}u。\qquad(26)$$

可与证明由(18)定义的函数 $\xi(s,\chi)$ 是整函数类似地，应用引理 1.1.1 的(ii)证明，对任意复数 s 定义的函数

$$\tilde{\xi}(s,\chi)=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} u^{-\frac{s}{2}}G(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u$$

$$+\int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} G(u,\chi)\mathrm{d}u \tag{27}$$

是一个整函数。再用我们已经定义过的整函数 $g(s)$,定义

$$\tilde{\lambda}(s,\chi) = \tilde{\xi}(s,\chi)g(\frac{1}{2}(s+1))(q\pi^{-1})^{-\frac{1}{2}(s+1)},$$

则 $\tilde{\lambda}(s,\chi)$ 为一个整函数,且对于正整数 m, $\tilde{\lambda}(1-2m,\chi)=0$。由(26)及(27)可知,当 $\mathrm{Re}s>5$ 时 $\tilde{\lambda}(s,\chi)=L(s,\chi)$,因此,我们就在 $\chi(-1)=-1$ 时,也将 $L(x,\chi)$ 解析开拓到了全复 s 平面。若仍记 $\tilde{\lambda}(s,\chi)$ 为 $L(s,\chi)$,则解析开拓后的 $L(s,\chi)$ 对任何正整数 m 满足 $L(1-2m,\chi)=0$。由

$$\overline{\tau(\chi)} = \sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)e(-\frac{a}{q}) = -\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(-a)e(-\frac{a}{q}) = -\tau(\overline{\chi}),$$

以及 $q=|\tau(\chi)|^2=\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}$(见定理1.2.3的(ii)),我们有函数方程

$$\tilde{\xi}(1-s,\overline{\chi}) = \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}\tilde{\xi}(s,\chi)。 \tag{28}$$

为将(20)与(28)写成统一的形式,令

$$\delta = \begin{cases} 0, & 若\ \chi(-1)=1, \\ 1, & 若\ \chi(-1)=-1, \end{cases}$$

以及

$$\xi(s,\chi) = \frac{i^{\delta}q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}(\delta-1-s)}F(u,\overline{\chi})\mathrm{d}u + \int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}(\delta+s)-1}F(u,\chi)\mathrm{d}u,$$

这里 $F(u,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{\delta}e^{-\pi un^2/q}$。则

$$\xi(s,\chi)=\begin{cases}L(s,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right),\\ \qquad 若\ s\neq-\delta-2n,n\ 为任意非负整数,\\ \lim\limits_{s\to-\delta-2n}\left(L(s,\chi)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\right),\\ \qquad 若\ s=-\delta-2n,n\ 为某个非负整数,\end{cases}$$

$$i^{\delta}\xi(s,\chi)=\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\xi(1-s,\overline{\chi}),$$

其中 $L(s,\chi)$ 已被解析开拓到了全平面,且以 $-\delta-2n$ 为零点,n 为任意非负整数。

(ii) 对于 $\zeta(s)$,当 $\mathrm{Re}s>5$ 时,从 $q=1$ 时的(8)式出发,对任意正整数 N 可与(12)式类似地得

$$\left(\sum_{n=1}^{N}n^{-s}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi yn^2}\right)\mathrm{d}y$$
$$+\int_{1}^{N}y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi yn^2}\right)\mathrm{d}y。$$

在引理 1.3.3 中取 $\alpha=0,x=y^{-1}$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi yn^2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-y\pi n^2}-1\right)=\frac{1}{2}\left(y^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2/y}-1\right),$$

所以

$$\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-y\pi n^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2/y}\right)\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\frac{1}{N}}^{1}y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2/y}\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+O\left(N^{\frac{3}{2}-\frac{\sigma}{2}}\right)$$
$$=\int_{1}^{N}u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2u}\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{s(s-1)}+O(N^{-1}),$$

$$\left(\sum_{n=1}^{N}n^{-s}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_{1}^{N}u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}F(u)\mathrm{d}u+\int_{1}^{N}u^{\frac{s}{2}-1}F(u)\mathrm{d}u$$
$$+\frac{1}{s(s-1)}+O(N^{-1}),$$

这里 $F(u)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi un^2}$。接下去,令 $N\to\infty$,并应用$\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$,可与(17)类似地得

$$2(s-1)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)$$

$$=s(s-1)\left(\int_1^{\infty}u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}F(u)\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}u^{\frac{s}{2}-1}F(u)\mathrm{d}u\right)+1。\quad(29)$$

虽然这是在 $\mathrm{Re}s>5$ 时得到的,但是由与函数 $L(s,\chi)$ 的 $\chi(-1)=1$ 的情形类似地可知(29)右端表示 s 的整函数,我们记为 $\xi(s)$。则

$$2(s-1)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)=\xi(s),\xi(0)=\xi(1)=1,\quad(30)$$

且若令 $g_1(s)=g\left(\frac{s}{2}+1\right)$(关于 $g(z)$,见(i)的证明),并定义

$$\lambda(s)=\frac{1}{2}\xi(s)g_1(s)\pi^{\frac{s}{2}}(s-1)^{-1},$$

则易知 $\lambda(s)$ 为一个全平面上的半纯函数,具有唯一极点 $s=1$。由(30)可知当 $\mathrm{Re}s>5$ 时 $\lambda(s)=\zeta(s)$,因此 $\lambda(s)$ 是 $\zeta(s)$ 的解析开拓。我们通常仍将 $\lambda(s)$ 记为 $\zeta(s)$。因此,解析开拓后的 $\zeta(s)$ 仅以 $s=1$ 为极点,相应的残数为(由(7),并在相应的 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的积分表达式中作变量替换 $t=s^2$)

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s)=\lim_{s\to1}(s-1)\lambda(s)=\frac{1}{2}\xi(1)g_1(1)\pi^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}=1。$$

并且,由 g_1 及 g 的定义我们还有

$$\zeta(0)=\lambda(0)=-\frac{1}{2}\xi(0)g_1(0)=-\frac{1}{2},$$

$$\zeta(-2m)=-\frac{1}{2}\xi(-2m)g_1(-2m)\pi^{-m}(1+2m)^{-1}=0,$$

其中 $m\geqslant1$,m 为整数。若在 $\xi(s)$ 的表达式中以 $1-s$ 代 s,则我

们发现 $\xi(s)=\xi(1-s)$。这即 $\zeta(s)$ 的函数方程。并且,我们有

$$\xi(s)=\begin{cases}2(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right), \\ \qquad \text{若}\frac{1}{2}s\text{ 不为负整数}, s\neq 1, \\ 2\lim\limits_{s\to -2n}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right), \\ \qquad \text{若}\frac{1}{2}s\text{ 为负整数 }-n, \\ 1, \quad \text{若 } s=1。\end{cases}$$

证毕。

利用 L 函数和 ζ 函数的函数方程,我们给出它们当 $0\leqslant \mathrm{Re}s=\sigma\leqslant 1$ 时的估阶,这是运用残数定理研究某些数论函数求和的基础。我们有

定理 1.3.6 (i) 若 χ 为模 q 原特征,$s=\sigma+it, 0\leqslant\sigma\leqslant 1$,则

$$L(s,\chi)=O((q(|t|+2))^{(1-\sigma)/2}\log(q(|t|+2))),$$

而若 $\sigma\geqslant 1$,则 $L(s,\chi)=O(\log(q|s|))$。

(ii) 若 $s=\sigma+it, 0\leqslant\sigma\leqslant 1, s\neq 1$,则

$$\zeta(s)(s-1)=O((|t|+2)^{(3-\sigma)/2}\log(|t|+2))。$$

当 $\sigma\geqslant 1, |t|\geqslant 1$ 时,

$$\zeta(s)=O(\log(|t|+2))。$$

当 $x\geqslant 3$ 时,

$$\zeta\left(1+\frac{1}{\log x}\right)=O(\log x)。$$

证明:(i) 证明分二步。先给出 L 函数粗糙一些的估阶,然后在此基础上适当运用解析函数的最大模原理。

(a) 初步的阶估计。设 $N>M>2, 0\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant 1$。由推论 1.1.4,我们有

$$\sum_{M<n\leqslant N}\frac{\chi(n)}{n^s}=s\int_M^N\Big(\sum_{M<n\leqslant t}\chi(n)\Big)t^{-s-1}\mathrm{d}t+\Big(\sum_{M<n\leqslant N}\chi(n)\Big)N^{-s}。$$

先设 $\mathrm{Re}s\geqslant 3/2$。则得

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqslant M}\frac{\chi(n)}{n^s}+\sum_{n>N}\frac{\chi(n)}{n^s}+s\int_M^N\Big(\sum_{M<n\leqslant t}\chi(n)\Big)t^{-s-1}\mathrm{d}t$$
$$+\Big(\sum_{M<n\leqslant N}\chi(n)\Big)N^{-s}。\tag{31}$$

由定理 1.2.4 可知

$$\sum_{M<n\leqslant t}\chi(n)=O(q^{1/2}\log(2q))。\tag{32}$$

因此,若在(31)中令 $N\to\infty$,则得(用定义验证积分收敛)

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqslant M}\frac{\chi(n)}{n^s}+s\int_M^\infty\Big(\sum_{M<n\leqslant t}\chi(n)\Big)t^{-s-1}\mathrm{d}t。\tag{33}$$

利用估计(32)及引理 1.1.1 的(i)的类似证法,可知(33)中的积分表示复 s 平面中半平面 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数。于是,利用(33),我们已给出 $L(s,\chi)$ 由 $\mathrm{Re}s>1$ 到 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析开拓。并且,若再令 $M\to\infty$,则当 $\mathrm{Re}s>0$ 时还有

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}。$$

当 $s=\sigma+it,\sigma\in[1/2,1]$ 时,令 $M=q^{1/2}(|t|+2)$,由(32)和(33)我们有

$$\begin{aligned}L(s,\chi)&=O\Big(\sum_{n\leqslant M}n^{-\sigma}\Big)+O\Big(|s|q^{1/2}\log q\Big(\int_M^\infty t^{-\sigma-1}\mathrm{d}t\Big)\Big)\\&=O\Big(M^{1-\sigma}\Big(\sum_{n\leqslant M}n^{-1}\Big)\Big)+O(|s|q^{1/2}(\log q)\cdot M^{-\sigma})\\&=O((q^{1/2}(|t|+2))^{1-\sigma}\log(q(|t|+2)));\end{aligned}\tag{34}$$

其中用到

$$\sum_{n\leqslant M}n^{-1}\leqslant 1+\int_1^M\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\log M+1。$$

当 $s=\sigma+it,0\leqslant\sigma\leqslant 1/2$ 时,令

$$F(s)=\Gamma\left(\frac{\delta+1-s}{2}\right)g\left(\frac{\delta+s}{2}\right),$$

这里

$$\delta=\begin{cases}0, & 若\ \chi(-1)=1,\\ 1, & 若\ \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

$$g(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(s)}, & 若\ s\ 不为\ 0\ 或负整数,\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

在定理1.3.5的(i)的证明过程中,我们已证明 $g(s)$ 为整函数。由定理 1.1.5 的(iv) 可知,存在一个绝对常数 $t_0>1$,使得当 $|t|\geqslant t_0$ 时 $F(s)\ll|t|^{1/2-\sigma}$,而当 $|t|\leqslant t_0$ 时,因为在闭区域

$$\left\{s=\sigma+it\,|\,0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2},|t|\leqslant t_0\right\}$$

中 $F(s)$ 连续,所以 $F(s)$ 有界,即存在常数 $C_1>0$,使得 $|F(s)|\leqslant C_1$。这样,就有个绝对常数 $C>0$,使得当 $0\leqslant\sigma\leqslant 1/2$ 时,

$$|F(s)|\leqslant C(|t|+2)^{1/2-\sigma}。\tag{35}$$

由定理 1.3.5 的(i) 可知,当 $0\leqslant\sigma\leqslant 1/2$ 且 $(s,\sigma)\neq(0,0)$ 时,

$$L(s,\chi)=O(q^{1/2-\sigma}|F(s)||L(1-s,\overline{\chi})|)。$$

因此,由(34) 及(35) 可得

$$L(s,\chi)=O(q^{1/2(1-\sigma)}(|t|+2)^{1/2}\log(q(|t|+2)))。\tag{36}$$

由定理 1.3.5 的(i) 可知,若 $\delta=0,s=0$,则 $L(0,\chi)=0$,因此(36) 对 $0\leqslant\sigma\leqslant 1/2$ 总成立。由(34) 和(36) 可得

$$L(s,\chi)=O(q^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}(|t|+2)^{\min(1-\sigma,\frac{1}{2})}\log(q(|t|+2))),\tag{37}$$

其中 $s=\sigma+it,0\leqslant\sigma\leqslant 1$。

(b) 最大模原理的应用。当 $s=\sigma+it,0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 时,令

$$f(s)=L(s,\chi)q^{-(1-s)/2}(i(s-2))^{-(1-s)/2}(\log(q(s+2)))^{-1}。$$

显然，$f(s)$ 为连通开集 $\{s \mid -1/2 < \mathrm{Re}s < 3/2\}$ 上的解析函数。当 $\sigma \in [0,1]$ 及 $t \geqslant 0$ 时，由于

$$(i(s-2))^{-(1-s)/2} = \exp[-1/2(1-\sigma-it)(\log|s-2| + i\theta)] = \exp[(-(1-\sigma)\log|s-2| - t\theta + i\varphi)/2],$$

其中 φ 为一实数，而 θ 是由

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{-t + i(\sigma-2)}{\sqrt{t^2 + (\sigma-2)^2}}$$

确定的，$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$。利用 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时总成立的不等式 $\sin\xi \geqslant \pi\xi/2$（可用求导证明），可知

$$t(-\theta) \ll t\sin(-\theta) = \frac{(2-\sigma)t}{\sqrt{t^2 + (\sigma-2)^2}} \ll 1,$$

于是

$$|(i(s-2))^{-(1-s)/2}| \ll (t+2)^{(\sigma-1)/2}。$$

因而再由(37)可得

$$|f(\sigma+it)| \ll (t+2)^{\min((1-\sigma)/2, \sigma/2)}。\tag{38}$$

对任意小的正数 ε，令

$$h(s) = f(s)e^{i\varepsilon s}。$$

显然，由(38)可知，存在一个正的绝对常数 C_2，使得当 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 和 $t \geqslant 0$ 时

$$|h(it)| \leqslant C_2, |h(1+it)| \leqslant C_2, |h(\sigma)| \leqslant C_2。$$

又由(38)可知必存在 $T_0(\varepsilon) > 0$，使得当 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 及 $t \geqslant T_0(\varepsilon)$ 时，

$$|h(\sigma+it)| = |f(\sigma+it)|e^{-\varepsilon t} \leqslant C_2。$$

由于 $|h(s)| \leqslant C_2$ 当 s 位于矩形 $\{s \mid s = \sigma+it, 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T_0(\varepsilon)\}$ 的边界上时成立，故由最大模原理可知 $|h(s)| \leqslant C_2$ 当 s 位于此矩形边界及内部时都成立。于是，$|h(s)| \leqslant C_2$ 当 $(s = \sigma+it) 0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 及 $t \geqslant 0$ 时都成立，即此时

$$|f(\sigma+it)|\leqslant C_2e^{-\varepsilon t}。$$

由此,我们可对固定的 t 令 $\varepsilon\to 0$,则可得 $|f(s)|\leqslant C_2$。由此可得(i) 的估计。在 $t<0$ 时可类似证出。

(ii) 我们用估计 $L(s,\chi)$ 类似的方法来估计 $\zeta(s)$。设 $N>M\geqslant 2$,且 M 及 N 为整数。由推论 1.1.4 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{M<n\leqslant N}n^{-s}&=s\int_M^N\Big(\sum_{M<n\leqslant x}1\Big)x^{-s-1}\mathrm{d}x+\Big(\sum_{M<n\leqslant N}1\Big)N^{-s}\\&=s\int_M^N([x]-M)x^{-s-1}\mathrm{d}x+(N-M)N^{-s}\\&=-s\int_M^N\psi(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x+s\int_M^N(x-1/2-M)x^{-s-1}\mathrm{d}x\\&\quad+(N-M)N^{-s}\\&=-s\int_M^N\psi(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x+\frac{s}{1-s}(N^{1-s}-M^{1-s})\\&\quad+(1/2+M)(N^{-s}-M^{-s})+(N-M)N^{-s},\end{aligned}$$

其中 $\psi(x)=x-[x]-1/2$,$|\psi(x)|\leqslant 1/2$。令 $N\to\infty$,得

$$\begin{aligned}\zeta(s)-\sum_{n\leqslant M}n^{-s}&=-s\int_M^\infty\psi(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x-\frac{s}{1-s}M^{1-s}-\Big(\frac{1}{2}+M\Big)M^{-s}\\&=-s\int_M^\infty\psi(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}M^{-s}+\frac{1}{s-1}M^{1-s}。\end{aligned}\tag{39}$$

利用引理 1.1.1 的(i) 的类似证明方法,可知积分$\int_M^\infty\psi(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x$ 对任何给定 $M>0$ 都表示 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数。于是,由(39),我们就给出函数 $\zeta(s)$ 由 $\mathrm{Re}s>1$ 到开连通集 $\{s\mid\mathrm{Re}s>0,s\neq 1\}$ 上的解析开拓,并可知 $\zeta(s)$ 以 $s=1$ 为一阶极点,相应的残数为 1(这种方法与定理 1.3.5 的(ii) 的证明方法不同)。特别地,当 $s=\sigma+it$,$1/2\leqslant\sigma\leqslant 1$,$|t|\geqslant 2$ 时,由(39),在其中取 $M=[2+|t|]$,可得

$$(s-1)\zeta(s) = O\Big(|s-1|\Big(\sum_{n\leqslant M} n^{-\sigma}\Big)\Big) + O(M^{1-\sigma})$$
$$+ O(|s-1|M^{-\sigma}) + O(|s(s-1)|\int_M^\infty x^{-\sigma-1}\mathrm{d}x)$$
$$= O((|t|+2)^{2-\sigma}\log(|t|+2)); \tag{40}$$

这里用到(i) 中已证过的估计

$$\sum_{n\leqslant M} n^{-\sigma} \ll M^{1-\sigma}(\sum_{n\leqslant M} n^{-1}) \ll M^{1-\sigma}\log M。$$

当 $s=\sigma+it, 0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}, |t|\geqslant 2$ 时,与(35) 类似可证

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = O((|t|+2)^{1/2-\sigma})。 \tag{41}$$

根据定理 1.3.5 的(ii) 可知,对于使得 $s/2$ 及$(1-s)/2$ 都不为负整数,且 $s\neq 0,1$ 的 s,成立着

$$(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2}+1) = -s\pi^{(s-1)/2}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{s}{2}\right)。$$

因此,当 $s=\sigma+it, 0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}, |t|\geqslant 2$ 时,由(40) 及(41) 可得

$$(s-1)\zeta(s) = O\left(\left|s\zeta(1-s)\frac{\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right|\right)$$
$$= O(|\zeta(1-s)|(|t|+2)^{3/2-\sigma})$$
$$= O((|t|+2)^{3/2}\log(|t|+2))。 \tag{42}$$

令

$$H(s) = \begin{cases}(s-1)\zeta(s), & s\neq 1,\\ 1, & s=1。\end{cases}$$

则由于 $\zeta(s)$ 仅以 $s=1$ 为极点,且由(39),不难验证 $H(s)$ 是个整函数(也可用函数方程来说明)。因此,由 $H(s)$ 在闭集

$$\{s=\sigma+it \mid 0\leqslant\sigma\leqslant 1, |t|\leqslant 2\}$$

上连续,可知这时 $H(s)=O(1)$,再由(40)及(42),可知总有估计

$$H(s)=O((|t|+2)^{\min(2-\sigma,3/2)}\log(|t|+2)),$$

$$s=\sigma+it,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant1。$$

若令

$$f(s)=H(s)(i(s-2))^{-(3-s)/2}(\log(s+2))^{-1},$$

$$s=\sigma+it,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant1,$$

则应用最大模原理,可与(i)的(b)中类似地证得:存在绝对常数 $C_3>0$,使得 $|f(s)|\leqslant C_3$ 成立。这就证明了估计

$$(s-1)\zeta(s)=O((|t|+2)^{3/2-\sigma}\log(|t|+2)),$$

$$s=\sigma+it,0\leqslant\sigma\leqslant1,s\neq1。\tag{43}$$

当然,若将 $s=1$ 视为左边取极限的情形,则(43)仍成立。

当 $\sigma\geqslant1,|t|\geqslant1$ 时,在(39)中仍取 $M=[2+|t|]$,可得

$$\zeta(s)=O(\log M)+O\left(\frac{|s|}{M}+O(M^{-1})+O(M^{1-\sigma})\right)=O(\log M)。$$

当 $s=1+\dfrac{1}{\log x}$ 时,取 $M=2$,由(39)可得

$$\zeta\left(1+\frac{1}{\log x}\right)=O(\log M)+O\left(\frac{|s|}{M}\right)+O(M^{-1})+O(\log x)$$

$$=O(\log x)。$$

(ii) **证毕**。

注意:[PP]中对定理1.3.6(i)的相关证明含有错误。

练　　习

(Ⅰ)设 χ 为模 q 的原特征,$q\geqslant3$,当 $\chi(-1)=1$ 时,令 $\delta=0$,当 $\chi(-1)=-1$ 时令 $\delta=1$。用函数方程证明,对任意非负整数 n,$-\delta-2n$ 是解析开拓后的 $L(s,\chi)$ 的单重零点。类似地,设 n 为正整数,证明 $-2n$ 是解析开拓后的 $\zeta(s)$ 的单重零点。

(Ⅱ)利用 §1.2的练习(Ⅱ),证明当 $3\leqslant q\leqslant5$ 时,若 χ 为模

q 的实原特征,则(δ 定义同上)

$$F(u,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{\delta} e^{-\pi u n^2/q} \gg e^{-2\pi u}, u \geqslant 1。$$

由此及函数方程(定理 1.3.5 的(i)),证明若 s 为实数,则 $\xi(s,\chi) \neq 0$。

(Ⅲ) 根据定理 1.1.5、定理 1.3.5 的(i) 及定理 1.3.6 的(i),证明若 χ 为模 q 的原特征,$q \geqslant 3$,则当 $s = \sigma + it$, $-2 \leqslant \sigma \leqslant 0$ 时,

$$L(s,\chi) = O((q(|t|+2))^{1/2-\sigma} \log(q(|s|+2)))。$$

§1.4 整函数 $\xi(s,\chi)$ 的无穷乘积展开

根据定理1.3.5的(i)可知,对模 q 的任一原特征χ,在 $\mathrm{Re}s > 1$ 时定义的 L 函数 $L(s,\chi)$ 可以被解析开拓成一个整函数,并且,解析开拓之后的 $L(s,\chi)$ 按照 $\chi(-1) = 1$ 或 $\chi(-1) = -1$ 而分别以偶数 $0, -2, -4, \cdots$,或奇数 $-1, -3, -5, \cdots$ 为零点。这些零点被称为 $L(s,\chi)$ 的平凡零点。因为当 $\mathrm{Re}s = \sigma > 1$时,对模 q 的任一特征 χ 都有

$$|L(s,\chi)| = \left|\prod_{p \geqslant 2}\left(1 - \frac{\chi(p)}{ps}\right)^{-1}\right| > \prod_{p \geqslant 2}\left(1 - \frac{1}{p^{\sigma}-1}\right) > 0, \qquad (1)$$

所以 $L(s,\chi) \neq 0$。当 χ 为模 q 的原特征时,由函数方程可知,在 $\mathrm{Re}s < 0$时,在上述任何一种情况下,$L(s,\chi)$ 没有其他的零点了。现在的问题是,当$0 \leqslant \mathrm{Re}s \leqslant 1$时,$L(s,\chi)$ 是否有零点?我们下面的研究表明,$L(1,\chi) \neq 0$,并且 $L(s,\chi)$ 有无穷多个满足 $0 \leqslant \mathrm{Re}s \leqslant 1, s \neq 0$ 的零点 s,我们称这些零点为非平凡零点。为达此目

的，我们需要借助于复分析中的方法，对定理 1.3.5 的(i) 中引进的整函数进行较详尽的研究。一个整函数 $f(z)$ 被称为是有限阶的，如果存在一个正数 a，使得

$$|f(z)| \ll \exp(|z|^a)$$

当 $|z|$ 充分大时成立。这时我们把这种正数 a 的下确界 μ 称为 $f(z)$ 的级。显然，$\mu \geqslant 0$。我们有

引理 1.4.1　整函数 $\xi(z,\chi)$ 是一阶的。

证明：设 $r = 1 + \dfrac{2q(1+|z|)}{\pi}$，则由 §1.3 的估计(16) 及 $\xi(z,\chi)$ 的定义可得

$$|\xi(z,\chi)| \ll q\int_1^{\infty} u^{|z|+1} e^{-\pi u/q} du = q\left(\int_1^r + \int_r^{\infty}\right)$$

$$\ll qr^{|z|+2} + q\int_r^{\infty} u^{|z|+1} e^{-\pi u/q} du。$$

令 $g(u) = 2q(1+|z|)\log u - \pi u,\ u \geqslant 1$。因为当 $u \geqslant r$ 时，

$$g'(u) = 2q(1+|z|)/u - \pi < 0,$$

所以当 $u \geqslant r$ 时，$g(u)$ 为单调下降函数，$g(u) \leqslant g(r)$，即有

$$u^{|z|+1} \leqslant e^{\pi u/(2q)} r^{\pi r},$$

因此，

$$\int_r^{\infty} u^{|z|+1} e^{-\pi u/q} du \leqslant \left(\int_r^{\infty} e^{-\pi u/(2q)} du\right) r^{\pi r} \ll qr^{\pi r},$$

$$|\xi(z,\chi)| \ll q^2 r^{\pi r}。$$

对任给 $\varepsilon > 0$，当 $|z|$ 充分大时，即知估计 $|\xi(z,\chi)| = O(\exp(|z|^{1+\varepsilon}))$ 成立。由此可知 $\xi(z,\chi)$ 的级不超过 1。另一方面，可取 z 为充分大正数，则由(1) 有 $|L(z,\chi)| \gg 1$，而由定理 1.1.5 的(iii) 可知 $\left|\Gamma\left(\dfrac{z}{2}\right)\right| = \Gamma\left(\dfrac{z}{2}\right) \gg \exp\left(\dfrac{z}{3}\log z\right)$，所以

$$|\xi(z,\chi)| \gg (q/\pi)^{3/2} \exp\left(\frac{z}{3}\log z\right)。\tag{2}$$

故 $\xi(z,\chi)$ 的级又不能小于 1。所以 $\xi(z,\chi)$ 的级为 1。**证毕**。

我们需要有关整函数的一些知识。

引理1.4.2 若整函数 $g(z)$ 无零点,则必形如 $e^{h(z)}$, $h(z)$ 为一个整函数。

证明:若 $g(z)$ 无零点,则$\frac{g'(z)}{g(z)}$也为整函数。令

$$G(z) = \int_0^z \frac{g'(s)}{g(s)}\mathrm{d}s,$$

这里积分路径取为从 0 到 z 的直线段。容易验证, $G(z)$ 为解析函数,且 $g'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$。由于

$$(g(z)e^{-G(z)})'_z = g'(z)e^{-G(z)} - g(z)G'(z)e^{-G(z)} = 0,$$

可知解析函数 $g(z)e^{-G(z)}$ 为常数 $g(0)e^{-G(0)} = g(0)$,从而

$$g(z) = e^{G(z)} \cdot g(0)。$$

由于 $g(0)\neq 0$,我们有 $g(0) = e^{\alpha}$。令 $G(z) + \alpha = h(z)$ 即得所需。**证毕**。

引理 1.4.3 设 $f(z)$ 为一个整函数,其幂级数展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$,且设 $\mathrm{Re}(f(z)) \leqslant M$ 当 $|z| = R$ 时成立, $R \geqslant 1$。则当 $n \geqslant 1$ 时, $|b_n| \leqslant 2(M + |b_0|)R^{-n}$。

证明:令 $b_n = |b_n|e^{i\theta_n}$, $F(z) = f(z) - b_0$,则当 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 时,级数

$$F(Re^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|R^m e^{i(\theta_m + m\theta)} \tag{3}$$

绝对且一致收敛。一方面,逐项积分我们有

$$\int_0^{2\pi} Re(F(Re^{i\theta}))\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|R^m\left(\int_0^{2\pi}\cos(\theta_m + m\theta)\mathrm{d}\theta\right) = 0。 \tag{4}$$

另一方面,用 $\cos(\theta_n + n\theta)$ 乘(3)式两边(其中 n 为自然数),再逐项求积分,由

$$\int_0^{2\pi}\cos(\theta_m + m\theta)\cos(\theta_n + n\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(\theta_m + \theta_n + (m+n)\theta) + \cos(\theta_m - \theta_n + (m-n)\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases}\pi, & \text{若 } m = n,\\ 0, & \text{若 } m \neq n,\end{cases}$$

可得

$$\int_0^{2\pi} Re(F(Re^{i\theta}))\cos(\theta_n + n\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}|b_m|R^m\int_0^{2\pi}\cos(\theta_m + m\theta)\cos(\theta_n + n\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi|b_n|R^n。\tag{5}$$

将(4)与(5)相加,可得

$$\pi|b_n|R^n = \int_0^{2\pi} Re(F(Re^{i\theta}))(1 + \cos(\theta_n + n\theta))\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant (M + |b_0|)\int_0^{2\pi}(1 + \cos(\theta_n + n\theta))\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi(M + |b_0|)。$$

证毕。

引理 1.4.4　设 $q \geqslant 3$,χ 为模 q 原特征,则 $L(1,\chi) \neq 0$, $\xi(0,\chi) = \xi(1,\chi) \neq 0$。

证明:按 χ 为复特征与实特征,分两种情况证明 $L(1,\chi) \neq 0$。

(a)χ 为复特征。设 s 为实数,$s > 1$。对于模 q 的任一特征 ψ,由

$$L(s,\psi) = \prod_p\left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)^{-1} \neq 0,$$

可得

$$\frac{1}{L(s,\psi)} = \prod_p \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right) = \lim_{x\to\infty}\prod_{p\leqslant x}\left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\log\left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)\right),$$

这里对数取主分支。由于当$|z| < \frac{1}{2}$时

$$\log(1+z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(-1)^{m-1}z^m \ll |z|,$$

以及$\sum_{p\geqslant 2} p^{-s} \leqslant \sum_{n\geqslant 2} n^{-s} < \infty$，我们得

$$\frac{1}{L(s,\psi)} = \exp\left(\sum_{p\geqslant 2}\log\left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)\right) = \exp\left(-\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m}\sum_{p\geqslant 2}\frac{\psi(p^m)}{p^{ms}}\right),$$

$$\left|\prod_{\psi}L(s,\psi)\right| = \left|\exp\left(\sum_{\psi}\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m}\sum_{p\geqslant 2}\frac{\psi(p^m)}{p^{ms}}\right)\right|$$

$$= \left|\exp\left(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{p\geqslant 2}m^{-1}p^{-ms}\sum_{\psi}\psi(p^m)\right)\right|$$

$$= \exp\left(\sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ p^m\equiv 1 (\bmod q)}}\sum_{p\geqslant 2}m^{-1}p^{-ms}\varphi(q)\right) \geqslant 1, \tag{6}$$

这里$\prod_{\psi}$与$\sum_{\psi}$表示对模q的所有特征求积与求和，并在交换求和时注意到了级数的绝对收敛性。因χ为复特征，所以若$\mathrm{Re}s > 0$，则利用§1.3的(33)我们可导出

$$\overline{L(s,\chi)} = L(\overline{s},\overline{\chi})。$$

特别地，若$L(1,\chi) = 0$，则$L(1,\overline{\chi}) = 0$。当ψ为模q的主特征χ_0时，若$s > 1$，则

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p\mid q}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)。 \tag{7}$$

在$s = 1$处作幂级数展开，我们有

$$L(s,\chi) = (s-1)^r G(s,\chi),$$

其中 r 为正整数，$G(s,\chi)$ 为一个整函数，$G(1,\chi)\neq 0$。这时，对于 $s>1$，可得

$$\prod_{\psi} L(s,\psi)=|L(s,\chi)|^{2}\cdot L(s,\chi_0)\cdot \prod_{\psi}{}' L(s,\psi)$$

$$=\left((s-1)^{2r-1}\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)\prod_{\psi}{}' L(s,\psi)\right)\cdot H(s)\,|G(s,x)|^{2}, \tag{8}$$

这里 $\prod\limits_{\psi}{}'$ 表示 $\psi\neq\chi,\overline{\chi},\chi_0$，$H(s)$ 为定理 1.3.6 的(ii) 证明中引入的函数

$$H(s)=\begin{cases}(s-1)\zeta(s), & s\neq 1,\\ 1, & s=1。\end{cases} \tag{9}$$

我们已证明 $H(s)$ 为整函数，因此当 $1<s<3/2$ 时，$|H(s)|\leqslant C$，C 为某个绝对常数。由(6) 与(8)，令 $s\to 1$，得到 $0\geqslant 1$，这一矛盾说明 $L(1,\chi)\neq 0$。

(b)χ 为实特征。假设 $L(1,\chi)=0$，我们将用较复杂的方法导出一个矛盾。由 $L(1,\chi)=0$，在 $s=1$ 处作幂级数展开，我们有

$$L(s,\chi)=(s-1)G(s,\chi),$$

这里 $G(s,\chi)$ 为一个整函数。当 $\mathrm{Re}s>\frac{1}{2}$ 时，令

$$F(s)=\frac{G(s,\chi)H(s)}{L(2s,\chi_0)}\prod_{p\mid q}(1-p^{-s})。 \tag{10}$$

显然，$F(s)$ 是 $\mathrm{Re}s>\frac{1}{2}$ 上的解析函数，且当 $\mathrm{Re}s>1$ 时，由(7) 及(9) 可得

$$F(s)=\frac{L(s,\chi)L(s,\chi_0)}{L(2s,\chi_0)}$$

$$=\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^{s}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^{2s}}\right)$$

$$= \prod_{p \nmid q} \left(\frac{1 + \chi_0(p) p^{-s}}{1 - \chi(p) p^{-s}} \right) = \prod_{\substack{p \nmid q \\ \chi(p)=1}} ((1 + p^{-s})(1 - p^{-s})^{-1})。$$

令 $a(1) = 1$,及当 $n \geqslant 2$ 时

$$a(n) = \begin{cases} 1, & 若对\ n\ 的每个素因子\ p,都有\ p \nmid q\ 且\ \chi(p) = 1, \\ 0, & 否则。\end{cases}$$

容易验证 $a(n)$ 为完全积性函数。若用 $\prod_p{}'$ 表示对满足 $p \nmid q$ 且 $\chi(p) = 1$ 的所有素数 p 求积,则当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时,由引理 1.3.1 可得

$$\prod_p{}'(1 + p^{-s}) = \prod_{p \geqslant 2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\mu(p^m)| a(p^m)}{p^{ms}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)|\mu(n)|}{n^s},$$

$$\prod_p{}'(1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \geqslant 2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a(p^m)}{p^{ms}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

所以

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-s}, \\ b(n) &= \sum_{mk=n} a(mk)|\mu(m)| \geqslant 0, \qquad (11) \\ b(1) &= 1。\end{aligned}$$

不难看出 $|b(n)| \leqslant \tau(n)$,这里 $\tau(n)$ 为除数函数。设 ε 为一个小正数。用 $C(\varepsilon)$ 表示圆 $\{|s - 2| = 3/2 - \varepsilon\}$,则当 $|\xi - 2| \leqslant 3/2 - 2\varepsilon$ 时,由残数定理可知

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\varepsilon)} \frac{F(s)}{s - \xi} \mathrm{d}s。$$

当 $s \in C(\varepsilon)$, $|\xi - 2| \leqslant 3/2 - 2\varepsilon$ 时,设 N 为任一正整数,则

$$\frac{1}{s - \xi} = \frac{1}{(s - 2) - (\xi - 2)} = \frac{1}{s - 2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - 2}{s - 2} \right)^n$$

$$= \frac{1}{s - 2} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\xi - 2}{s - 2} \right)^n + O\left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{3/2 - 2\varepsilon}{3/2 - \varepsilon} \right)^{N+1} \right),$$

所以

$$F(\xi) - \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\varepsilon)}\frac{F(s)}{s-2}\left(\frac{\xi-2}{s-2}\right)^{n}\mathrm{d}s\right)$$
$$= O\left(\frac{M}{\varepsilon}\left(\frac{3/2-2\varepsilon}{3/2-\varepsilon}\right)^{N+1}\right),$$

其中 $M = M(\varepsilon) = \max_{s\in C(\varepsilon)}|F(s)|$。令 $N\to\infty$ 可得

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}F(n,\varepsilon)(\xi-2)^{n},$$
$$F(n,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\varepsilon)}\frac{F(s)}{(s-2)^{n+1}}\mathrm{d}s。\tag{12}$$

用引理 1.3.4,在(12) 中求导,可得

$$F^{(r)}(2) = r!\,F(r,\varepsilon),r\geqslant 0。$$

另外,用引理 1.3.4(利用 $|b(n)|\leqslant\tau(n)$ 及 $\sum\tau(n)n^{-\sigma}<\infty,\sigma>1$),在(11) 中求导,可得

$$F^{(r)}(2) = \sum_{n=1}^{\infty}b(n)(-\log n)^{r}n^{-2}$$
$$= (-1)^{r}\sum_{n=1}^{\infty}b(n)(\log n)^{r}n^{-2},r\geqslant 0。$$

所以

$$(-1)^{r}F(r,\varepsilon) = \frac{1}{r!}\sum_{n\geqslant 1}b(n)(\log n)^{r}n^{-2}\geqslant 0,$$
$$F(\xi) = \sum_{r\geqslant 0}(-1)^{r}F(r,\xi)(2-\xi)^{r}\geqslant F(0,\xi)$$
$$= F(2) = \sum_{n=1}^{\infty}b(n)n^{-2}\geqslant b(1) = 1。$$

特别地,当 $\xi = 1/2+2\varepsilon$ 时,有

$$F(1/2+2\varepsilon)\geqslant 1。\tag{13}$$

但另一方面,在 $\mathrm{Re}s>1/2$ 时,由(7) 及(10) 可知

$$F(s) = \frac{G(s,\chi)H(s)}{H(2s)}(2s-1)\prod_{p|q}(1+p^{-s})^{-1}。$$

由于 $H(1)=1$，$G(s,\chi)$、$H(s)$ 及 $H(2s)$ 为整函数，因此当 $s=1/2+2\varepsilon$ 且 ε 充分小时

$$|F(s)| \leqslant |\lambda(\chi,q)|(2s-1) = 4\varepsilon|\lambda(\chi,q)|, \qquad (14)$$

其中 $\lambda(\chi,q)$ 是仅与 χ 及 q 有关的常数。由(13)和(14)，在 ε 充分小时就得出矛盾。这说明 $L(1,\chi)\neq 0$。

综合两种情况，对于模 q 的原特征 χ，总有 $L(1,\chi)\neq 0$。由定理 1.3.5 的(i)可知 $\xi(1,\chi)=\xi(0,\chi)\neq 0$。**证毕**。

引理 1.4.5　设 χ 为模 q 的原特征。$q\geqslant 3$，$\xi(s,\chi)$ 共有可列无限多个零点 ρ，它们都满足 $0\leqslant \operatorname{Re}\rho\leqslant 1$，$\rho\neq 0,1$，并且若按绝对值增长的顺序将这些零点排列为 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$，即 $0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|\leqslant\cdots$，其中每个零点是几阶的就重复排列几次，则 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 就是 $L(s,\chi)$ 的全部非平凡零点。任给正数 ε，还有 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|z_n|^{-1-\varepsilon}<\infty$。

证明：简记 $\xi(s,\chi)=f(s)$。我们分几步证明。

(a) 由引理 1.4.4 可知 $\xi(0,\chi)=\xi(1,\chi)\neq 0$。我们断言 $f(z)$ 必有零点。否则，由引理 1.4.2，$f(z)=e^{h(z)}$，$h(z)$ 为一个整函数。由引理 1.4.1 可知，任给充分小正数 ε，都可取得正数 $R_0(\varepsilon,q)$，使得当 $|z|=R>R_0(\varepsilon,q)$ 时

$$|f(z)| = e^{\operatorname{Re}(h(z))} \leqslant \exp(R^{1+\varepsilon})。$$

因此 $\operatorname{Re}(h(z))\leqslant R^{1+\varepsilon}$ 当 $|z|=R$ 时成立。由引理 1.4.3 可知，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 为 $h(z)$ 在 $z=0$ 处的幂级数展开式，则

$$|b_n| \leqslant 2(R^{1+\varepsilon}+|b_0|)R^{-n}, n\geqslant 1。$$

当 $n\geqslant 2$ 时，令 $R\to\infty$，可得 $b_n=0$。所以 $h(z)=\alpha z+\beta$，α 与 β 为适当常数，但这是不可能的，因为由(2)，当 z 充分大时就会产生矛盾。所以 $f(z)$ 必有零点。

(b) $f(z)$ 必有无限多个零点。

否则，设 $z_1,\cdots,z_n$ 为$f(z)$ 全部零点（m 阶零点已在其中计数了 m 次），$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|$。与(a) 类似地可导出矛盾。因为一个整函数在每一点处的幂级数展开式的收敛半径都是无穷大的，故通过在 $f(z)$ 的每个零点处作幂级数展开，容易看到存在一个整函数 $f_1(z)$，它不以 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为零点，且满足

$$f(z)=\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)f_1(z)。$$

由于 $f_1(z)$ 的零点就是 $f(z)$ 的零点，所以 $f_1(z)$ 无零点。由引理 1.4.2 可知 $f_1(z)=e^{b_1(z)}$，$b_1(z)$ 为一个整函数。由引理 1.4.1，任给 $\varepsilon>0$，存在正数 $R_0(\varepsilon,q)$，当 $R>R_0(\varepsilon,q)$，$|z|=R$ 时，

$$|f(z)|\leqslant\exp(R^{1+\varepsilon})。$$

现在取 $R>\max(R_0(\varepsilon,q),2|z_n|)$，则当 $|z|=R$ 时，

$$\begin{aligned}|f_1(z)|&=e^{\mathrm{Re}(b_1(z))}=f(z)\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)^{-1}\\&\leqslant|f(z)|\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{z}{z_i}-1\right)^{-1}\\&\leqslant|f(z)|\leqslant\exp(R^{1+\varepsilon}),\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Re}(b_1(z))\leqslant R^{1+\varepsilon}$。由此，可与(a) 类似地，应用引理 1.4.3 得到 $b_1(z)=\alpha z+\beta$，α 及β 为常数。但若取 z 为充分大正数，则由(2) 可得出矛盾，因为这时我们有

$$\begin{aligned}|f(z)|&\leqslant\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{|\alpha|z+|\beta|}\\&\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{z}{z_i}\right)\right)e^{|\alpha|z+|\beta|}\\&\leqslant\exp\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|z_i|}+|\alpha|\right)z+|\beta|\right)。\end{aligned}$$

所以 $f(z)$ 必有无限多个零点。

(c) 因为一个非常数的整函数在每个形如 $|z|\leqslant N$（N 为正整数）的有界区域里仅可能有有限多个零点，我们看到 $f(z)$ 在全

复 z 平面上共有可列无穷多个零点，且按绝对值的大小可把这些零点记为(记法可能不止一种) $z_1,\cdots,z_n,\cdots$，即 $0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|\leqslant\cdots$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$。由本节开头的说明，定理 1.3.5 的(i) 中 $\xi(s,\chi)$ 与 $L(s,\chi)$ 的关系，及定理 1.1.5 的(iii)，可知当 $\mathrm{Re}s>1$ 时 $f(s)\neq 0$。由函数方程又可知当 $\mathrm{Re}s<0$ 时，$f(s)\neq 0$。因此，所有的根 z_i 都满足 $0\leqslant\mathrm{Re}z_i\leqslant 1$。再由定理 1.1.5 的(iii) 与定理 1.3.5 的(i)，可知 $z_1,\cdots,z_n,\cdots$，即为 $L(z,\chi)$ 的全部非平凡零点(注意，当 $|z_k|=|z_{k+1}|$ 时，我们可按 $\mathrm{Im}z_{k+1}\geqslant\mathrm{Im}z_k$ 的顺序排列)。

(d) 任给 $\varepsilon>0$，由引理 1.4.1 可知存在 $R_0(\varepsilon,q)>0$，使得当 $R>R_0(\varepsilon,q)$ 时，

$$\max_{|z|=2R}|f(z)|\leqslant\exp(R^{1+\varepsilon/2})。$$

设 $f(z)$ 的位于闭圆盘 $|z|\leqslant R$ 中的零点共有 k 个，它们为 $z_1,\cdots,z_k$，其中重零点是几重就算几个，且零点是按绝对值的增长顺序排列的。分别在各个零点处做整函数的幂级数展开，可知

$$f(z)=\Big(\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)\Big)g(z),$$

这里 $g(z)$ 为整函数，且 $g(0)\neq 0, g(z_i)\neq 0$。由解析函数的最大模原理可得

$$\begin{aligned}|g(0)|&\leqslant\max_{|z|=2R}|g(z)|\leqslant\max_{|z|=2R}\left(|f(z)|\cdot|z|^{-k}\prod_{i=1}^{k}\left|1-\frac{z_i}{z}\right|^{-1}\right)\\&\leqslant\exp(R^{1+\varepsilon/2})(2R)^{-k}\cdot 2^k,\end{aligned}$$

所以，当 $R>R_1(\varepsilon,q)>R_0(\varepsilon,q)$ 时，

$$R^k\leqslant\exp(R^{1+\frac{1}{2}\varepsilon})|g(0)|^{-1}\leqslant\exp(R^{1+2\varepsilon/3}),$$

从而 $k\leqslant R^{1+2\varepsilon/3}$。

(e) 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 是在(c) 中排列的 $f(z)$ 的全部零点，ε

是任意正数。我们证明：$\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^{-1-\varepsilon}<\infty$。为此，设 $R_1=R_1(\varepsilon,q)$ 是(d) 中确定的与 ε 及 q 有关的正数，则当 $R>R_1$ 时，

$$\sum_{R<|z_n|\leqslant 2R}|z_n|^{-1-\varepsilon}\leqslant R^{-1-\varepsilon}\Big(\sum_{|z_n|\leqslant 2R}1\Big)R^{-1-\varepsilon}(2R)^{1+2\varepsilon/3}$$
$$\leqslant 2^{1+\varepsilon}R^{-\varepsilon/3}。$$

取 $R=2^iR_1, i\geqslant 1, i$ 为正整数，然后对 i 求和，可得

$$\sum_{2R_1<|z_n|\leqslant 2^{J+1}R_1}|z_n|^{-1-\varepsilon}\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant J}2^{1+\varepsilon}(2^iR_1)^{-\varepsilon/3}$$
$$<2^{1+\varepsilon}R_1^{-\varepsilon/3}(2^{\varepsilon/3}-1)^{-1}。$$

令 $J\to\infty$，就可知 $\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^{-1-\varepsilon}<\infty$。**证毕**。

有了这些准备，我们来证明。

定理 1.4.6　设 χ 为模 q 的原特征，整函数 $\xi(s,\chi)$ 由定理 1.3.5 的(i) 中定义，则

$$\xi(s,\chi)=e^{as+b}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{s}{z_n}\Big)e^{s/z_n},$$

其中 $a=a(\chi)$ 和 $b=b(\chi)$ 是与 χ 有关的常数，$z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 是引理 1.4.5 中所述的 $\xi(s,\chi)$ 的全部零点，它们是按照绝对值递增的顺序排列的，即 $0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|\leqslant\cdots$，其中零点是几阶的就重复计数几次，无穷乘积的值理解为极限

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{|z_n|\leqslant x}\Big(1-\frac{s}{z_n}\Big)e^{s/z_n}。$$

证明：分成几个步骤。

(a) 对每个复数 z 及正数 r，定义

$$P(x,z)=\prod_{|z_n|\leqslant x}\Big(1-\frac{z}{z_n}\Big)e^{z/z_n}。$$

我们指出，极限 $\lim_{x\to\infty}P(x,z)$ 对每个 z 都收敛，且代表一个整函数。事实上，对给定的复数 s，设 z 为任意的满足 $|z-s|<(|s|+$

1)/2 的复数。由于 $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$，选取正整数 k 适当大，使得 $|z_k| > 3|s| + 1$。设 $x > |z_k|$，则

$$P(x,z) = P(|z_k|,z)\prod_{|z_k|<|z_n|\leqslant x}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}。$$

当 $|z_n| > |z_k|$ 时，由 $|z| < (3|s|+1)/2$ 及 $|z_k| > 3|s| + 1$，可得 $|z/z_n| < 1/2$，所以

$$1-\frac{z}{z_n} = \exp\left(\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\right),$$

其中对数函数选取主分支，它满足 $\log 1 = 0$。这样一来，我们看到

$$P(x,z) = P(|z_k|,z)\exp\left[\sum\nolimits_x'\left(\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n}\right)\right], \tag{15}$$

其中 $\sum_x'$ 表示条件 $|z_k| < |z_n| \leqslant x$。由 $\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$ 的 Taylor 展开式，我们有

$$\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n} = -\sum_{u\geqslant 2}\frac{1}{u}\left(\frac{z}{z_n}\right)^u$$

$$= O\left(\sum_{u\geqslant 2}\left|\frac{z}{z_n}\right|^u\right) = O\left(\left|\frac{z}{z_n}\right|^2\right)。 \tag{16}$$

由此及 $\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^{-3/2} < \infty$（见定理 1.4.5），可知

$$\sum\nolimits_x'\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n}\right] = \sum{}'\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n}\right] + O(|z|^2x^{-1/2}),$$

这里 $\sum'$ 表示对一切满足 $|z_n| > |z_k|$ 的 z_n 求和。如此一来，在 (15) 中令 $x\to\infty$，可得

$$\lim_{x\to\infty}P(x,z) = P(|z_k|,z)\exp\left[\sum{}'\left(\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n}\right)\right]。 \tag{17}$$

此式对一切位于开圆盘 $D = \{z\,|z-s| < (|s|+1)/2\}$ 中的复数 z 都成立。由定义不难类似地证明，当 $z\in D$ 时，还有

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}$$
$$=P(|z_k|,z)\exp\left[\sum{}'\left(\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n}\right)\right]。\tag{18}$$

对于满足 $|z_n|>|z_k|$ 的每个 $n>k$，以及 $z\in D$，令

$$F_n(z)=\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\frac{z}{z_n}。$$

应用引理 1.3.4，可证级数 $\sum{}'F_n(z)$ 为 D 上解析函数，且

$$\left(\sum{}'F_n(z)\right)'=\sum{}'F_n'(z)=\sum{}'\left(\frac{1}{z-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)。\tag{19}$$

事实上，对任意的 $\alpha_0\in D$，令 $\delta=(3|s|+1)/12$，则当 $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ 时（α 为复数），

$$\begin{aligned}&|\alpha|<|\alpha_0|+\delta<\frac{7}{12}(3|s|+1),\\&|\alpha+\delta_1|\leqslant|\alpha|+\delta<\frac{2}{3}(3|s|+1),\end{aligned}\tag{20}$$

这里 $0<|\delta_1|<\delta$。所以，当 $|z_n|>|z_k|>3|s|+1$ 时，$|\alpha/z_n|<7/12$。因此，由 (16) 可知级数 $\sum{}'F_n(\alpha)$ 收敛。由于当 $|y|<1$ 时，

$$\log(1-y)+y=-\sum_{u\geqslant2}\frac{1}{u}y^u,$$

所以当 $0<|\delta_1|<\delta$，$\alpha_0\in D$ 时，由 (20) 可得

$$\begin{aligned}F_n(\alpha_0+\delta_1)-F_n(\alpha_0)|&\leqslant\sum_{u\geqslant2}\frac{1}{u}|(\alpha_0+\delta_1)^u-\alpha_0^u||z_n|^{-u}\\&\leqslant|\delta_1|\cdot\sum_{u\geqslant2}(\max(|\alpha_0+\delta_1|,|\alpha_0|))^{u-1}|z_n|^{-u}\\&\leqslant|\delta_1|\cdot(|\alpha_0|+|\delta_1|)|z_n|^{-2}\\&\quad\cdot\sum_{u\geqslant0}\left(\frac{\max(|\alpha_0+\delta_1|,|\alpha_0|)}{|z_n|}\right)^u\\&\leqslant|\delta_1|\cdot(|\alpha_0|+\delta)|z_n|^{-2}\sum_{u\geqslant0}\left(\frac{2}{3}\right)^u\end{aligned}$$

$$= 3|\delta_1|(|\alpha_0| + \delta)|z_n|^{-2},$$

$$|F'_n(\alpha_0)| = \frac{|\alpha_0|}{|(\alpha_0 - z_n)z_n|} \leqslant \frac{|\alpha_0|}{(|z_n| - |\alpha_0|)|z_n|}$$

$$\leqslant \frac{2|\alpha_0|}{|z_n|^2},$$

因此,由 $\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^{-2} < \infty$ 及引理 1.3.4,就可知

$$\left(\sum{}' F_n(\alpha)\right)'_{\alpha=\alpha_0} = \sum{}' F'_n(\alpha_0)。$$

将 α_0 换成 z,即得(18)。因此,由(17)可知 $\lim\limits_{x\to\infty} P(x,z)$ 不仅在 D 上存在,而且代表 D 上一个解析函数。由 s 的任意性,(17)及(18),就得知极限

$$P(z) = \lim_{x\to\infty} P(x,z) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n} \tag{21}$$

为一个整函数。

(b) 对于(21)中定义的整函数 $P(z)$,我们有 $\xi(z,\chi) = P(z)e^{G(z)}$,$G(z)$ 为一个整函数。

根据定义及以上推导,可知 $P(z_r) = 0, r = 1,2,\cdots$,而若 $z \neq z_1, z_2, \cdots$,则 $P(z) \neq 0$。简记 $f(z) = \xi(z,\chi)$。对于 $f(z)$ 的任一个零点 z_r,由幂级数展开式,可得

$$f(z) = (z - z_r)^h F_r(z), \tag{22}$$

其中 h 为零点 z_r 的阶数,$F_r(z)$ 为一个整函数,$F_r(z_r) \neq 0$。又由定义有

$$P(z) = (z - z_r)^h p_r(z)$$

$$p_r(z) = (-1)^h e^{hz/z_r} z_r^{-h} \prod_{z_n \neq z_r}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n},$$

其中 $p_r(z_r) \neq 0$。定义一个函数 $g(z)$ 如下:

$$g(z)=\begin{cases}f(z)/P(z), & \text{当 } z\neq z_1,z_2,\cdots,\text{时},\\ F_r(z_r)/p_r(z_r), & \text{当 } z=z_r,r=1,2,\cdots,\text{时}。\end{cases}\tag{23}$$

显然，$g(z)$ 在复平面无零点。若 s_0 不为 $f(z)$ 的零点，因为不为常数的解析函数在有界区域中仅有有限个零点，我们可选取 $\delta>0$，使当 $|s-s_0|<\delta$ 时，s 不为 $f(z)$ 的零点，从而 $g(z)=f(z)/P(z)$ 在 $z=s_0$ 处可导。若 s_0 为 $f(z)$ 的零点，设 $s_0=z_r$，则由前述说明，可选取 $\delta_r>0$，使得当 $|z-z_r|<\delta_r$ 时，$F_r(z)\neq 0$，$p_r(z)\neq 0$，因此 $F_r(z)/p_r(z)$ 为 $\{z\,|\,|z-z_r|<\delta_r\}$ 中的解析函数。当 $|z-z_r|<\delta_r$ 时，若 $z\neq z_r$，我们有

$$\frac{F_r(z)}{p_r(z)}=\frac{f(z)}{P(z)},$$

而

$$\frac{F_r(z_r)}{p_r(z_r)}=\lim_{z\to z_r}\frac{f(z)}{P(z)}。$$

故由定义就可知 $g(z)$ 在 $z=z_r=s_0$ 处可导，且

$$g'(s_0)=g'(z_r)=(F_r(z)/p_r(z))'_{z=z_r}。$$

因此 $g(z)$ 为一个整函数，处处不为零，且满足 $f(z)=P(z)g(z)$。由引理 1.4.2，可知 $g(z)=e^{G(z)}$，$G(z)$ 为一个整函数。

(c) 由(b) 中确定的整函数 $G(z)$ 为一个一次多项式，即 $G(z)=az+b$，a 与 b 为仅与 q 及 χ 有关的常数。

仍简记 $f(z)=\xi(z,\chi)$。任给正数 ε，由引理1.4.1可知，存在 $R_0=R_0(\varepsilon,q)$，当 $|z|>R_0$ 时

$$|f(z)|<\exp(|z|^{1+\varepsilon/2})。\tag{24}$$

设 R 为任一正数，$R>R_0(\varepsilon,q)$。当 $|z|=R$ 且 $f(z)\neq 0$ 时，我们得

$$e^{G(z)}=\frac{f(z)}{P(z)}=f(z)(P(2R,z))^{-1}\cdot\prod_{|z_n|>2R}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}e^{z/z_n},\tag{25}$$

这里一切记号由(a)、(b)中确定。令

$$E(z)=\begin{cases}f(z)(P(2R,z))^{-1}, \\ \qquad 若|z|>2R 或|z|\leqslant 2R, f(z)\neq 0, \\ F_r(z_r)(-z_r)^{-h}e^{-hz/z_r}\prod\limits_{\substack{|z_n|\leqslant 2R\\ z_n\neq z_r}}\left(1-\dfrac{z_r}{z_n}\right)^{-1}e^{-z_r/z_n}, \\ \qquad 若|z|\leqslant 2R 且 z=z_r, f(z_r)=0,\end{cases}$$

这里整函数 $F_r(z)$ 由(22)给出。与证明(23)中定义的函数 $g(z)$ 是整函数类似地,可证 $E(z)$ 是个整函数。因此当 $|z|=R>R_0$ 时,由(24)及解析函数的最大模原理,可得

$$|E(z)|\leqslant \max_{|s|=4R}|E(s)|<\exp((4R)^{1+\varepsilon/2})\prod_{|z_n|\leqslant 2R}\left(\left|\frac{4R}{z_n}\right|-1\right)^{-1}$$
$$\leqslant \exp((4R)^{1+\varepsilon/2})。\tag{26}$$

由(25),当 $f(z)\neq 0,|z|=R$ 时可得

$$e^{G(z)}=E(z)\prod_{|z_n|>2R}(1-z/z_n)^{-1}e^{-z/z_n}$$
$$=E(z)\cdot\exp\Big[\sum_{|Z_n|>2R}(-\log(1-z/z_n)-z/z_n)\Big],\tag{27}$$

但由于 $E(z)$ 为整函数,无穷乘积所代表的函数在 $|z|<3R/2$ 上解析(参见(a)),所以(27)式当 $|z|=R$ 且 z 为 $f(s)$ 的零点时也成立。当 $|z|=R$ 时,由(16)可得

$$\sum_{|z_n|>2R}(-z/z_n-\log(1-z/z_n))=O\Big(\sum_{|z_n|>2R}|z/z_n|^2\Big)$$
$$=O\Big(R^2(2R)^{-1+\varepsilon/2}\sum_{r\geqslant 1}|z_n|^{-1-\varepsilon/2}\Big)$$
$$=O(R^{1+\varepsilon/2}2^{-1+\varepsilon/2});$$

这里用到 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|z_n|^{-1-\varepsilon/2}<\infty$。因此,由(26)及(27),存在正数

$R_1(\varepsilon,q)$，$R_1(\varepsilon,q)>R_0(\varepsilon,q)$，使得当 $|z|=R>R_1(\varepsilon,q)$ 时，

$$e^{G(z)}=O(\exp((4^{1+\varepsilon/2}+2^{-1+\varepsilon/2})R^{1+\varepsilon/2}))<\exp(R^{1+\varepsilon})。$$

由此，可用引理 1.4.5 证明的(a) 中类似的方法，应用引理 1.4.3，证明 $G(z)$ 为一个一次多项式，即 $G(z)=az+b$，这里 a 与 b 是与 q 及 χ 有关的常数。**证毕**。

当 $\mathrm{Re}s>1$，χ 为模 q 的任一特征时，由(i) 可知 $L(s,\chi)\neq 0$。因此 $\dfrac{1}{L(s,\chi)}$ 是 $\mathrm{Re}s>1$ 上的解析函数，且

$$\begin{aligned}\frac{1}{L(s,\chi)}&=\prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\prod_{p\geqslant x}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right)\\&=\exp\left(\sum_{p\geqslant 2}\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right),\end{aligned}\tag{28}$$

这里对数函数的值取主分支。对任意的复数 α_0，$\mathrm{Re}\alpha_0>1$，取充分小正数 δ，使得 $\mathrm{Re}\alpha_0-\delta>1$。对任意复数 s，$\mathrm{Re}s>0$，令

$$F_n(s)=\begin{cases}\log\left(1-\dfrac{\chi(p)}{p^s}\right), & 若\ n=p\ 为素数,\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

则由 $F_n(s)=O\left(\left|\dfrac{1}{n^s}\right|\right)$，当 $|\alpha-\alpha_0|\leqslant\delta$ 时，可知 $\sum\limits_{n\geqslant 2}F_n(\alpha)$ 收敛。当 $\mathrm{Re}s>0$ 时，令

$$g_p(s)=\frac{\chi(p)}{p^s-\chi(p)},\quad f_p(s)=\int_1^s g_p(z)\mathrm{d}z,$$

其中积分是沿由 1 至 s 的直线段取的。显然，$g_p(s)$ 是 $\mathrm{Re}s>0$ 上解析函数，而由定义则可容易地验证 $f_p(s)$ 也为 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数，且 $f_p'(s)=g_p(s)=(F_p(s))'$。因此

$$(F_p(s)-f_p(s))'=0,$$

这说明 $F_p(s)-f_p(s)$ 在开连通集 $\{s\,|\,\mathrm{Re}s>0\}$ 上为常数，于是

$$F_p(s) = f_p(s) + F_p(1)。$$

因此，当 $n = p$ 为素数，$0 < |\delta_0| < \delta$ 时

$$|F_n(\alpha_0 + \delta_1) - F_n(\alpha_0)| = \left|\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\delta_1} g_p(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant |\delta_1| \cdot \frac{1}{p^{Re\alpha_0-\delta} - 1},$$

又

$$|F_n'(\alpha_0)| = |g_p(\alpha_0)| \leqslant \frac{1}{p^{\alpha_0} - 1} < \frac{1}{p^{Re\alpha_0-\delta} - 1}。$$

因为 $\sum\limits_p (p^{Re\alpha_0-\delta} - 1)^{-1} \ll \sum\limits_p p^{\delta - Re\alpha_0} < \infty$，由引理 1.3.4 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导，且

$$\left(\sum_{n\geqslant 2} F_n(\alpha)\right)'\bigg|_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n\geqslant 2} F_n'(\alpha_0)。$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(s)$ 在 $\mathrm{Re}s > 1$ 上解析，且

$$\left(\sum_{p\geqslant 2} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right)' = \sum_{p\geqslant 2} \frac{\chi(p)\log p}{p^s - \chi(p)}。\tag{29}$$

由(28)及(29)，在(28)式两边对 s 求导，可得

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L^2(s,\chi)} = \exp\left(\sum_p \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right) \times \left(\sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s - \chi(p)}\right)。\tag{30}$$

由(28)及(30)，我们得到

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L^2(s,\chi)} = \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s - \chi(p)}, \quad \mathrm{Re}s > 1。\tag{31}$$

对任意正整数 n，von Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 定义为

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & 若\ n = p^m, p\ 为素数, m\ 为正整数, \\ 0, & 否则。\end{cases}$$

当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时，我们看到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{p\geqslant 2}\log p\sum_{m\geqslant 1}\frac{\chi(p^m)}{p^{ms}}=\sum_{p}\log p\sum_{m\geqslant 1}\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^m$$
$$=\sum_{p}\log p\cdot\frac{\chi(p)p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}}=\sum_{p}\frac{\chi(p)\log p}{p^s-\chi(p)}。\tag{32}$$

由(31)与(32),我们得

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}s>1。\tag{33}$$

等式(33)是我们用解析数论的方法研究求和 $\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\Lambda(n)$ 乃至素数在算术级数中分布的基础,因为由定理 1.3.5 和引理 1.4.5,我们已经掌握了有关 L 函数的许多知识,特别地若 χ 为原特征,则可知函数 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 在复 s 平面上去掉了 $-\delta-2n(n\geqslant 0)$ 及 $\xi(s,\chi)$ 的全部可列个零点 $z_1,z_2,\cdots(0\leqslant \mathrm{Re}z_i\leqslant 1,z_i\neq 0,z_i\neq 1,i\geqslant 1)$ 之外的开连通集 $D=D(\chi)$ 中是解析的(当 $\chi(-1)=1$ 时,$\delta=0$,当 $\chi(-1)=-1$ 时,$\delta=1$)。下面的结果则给出 L'/L 的包含其零点及 Γ 函数的展开式。

推论 1.4.7　设 χ 为模 q 的原特征,$q\geqslant 3$,令

$D(\chi)=\{s\,|\,s\neq -\delta,-\delta-2,-\delta-4,\cdots,z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots\}$,

其中当 $\chi(-1)=1$ 时 $\delta=0$,当 $\chi(-1)=-1$ 时,$\delta=1$,而 $z_1,z_2,\cdots$ 为由引理1.4.5和定理1.4.6所确定的 $\xi(s,\chi)$ 的全部零点,也即 $L(s,\chi)$ 的全部非平凡零点,它们满足

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots,0\leqslant \mathrm{Re}z_i\leqslant 1,z_i\neq 1(i\geqslant 1),$$
$$\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^{-1-\varepsilon}<\infty,\text{对所有 }\varepsilon>0。$$

$D(\chi)$ 为一个连通开集,且当 $s\in D(\chi)$ 时,我们有

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\frac{1}{2}\log\left(\frac{q}{\pi}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}+a(\chi)$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s-z_n}+\frac{1}{z_n}\right), \tag{34}$$

其中 $a(\chi)$ 是由定理 1.4.6 中确定的与 χ 有关的常数,它满足

$$\operatorname{Re}(a(\chi)) = -\sum_{n\geqslant 1}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)。$$

证明:分两步证明(34)当 $s\in D(\chi)$ 时成立,即先证明式(34)在复 s 平面上的一个小开连通集上成立,然后对等式两边进行解析开拓,证明当 $s\in D(\chi)$ 时(34)总成立。

(a) 设 $c_1=\min\left(\frac{1}{2}|z_1|,\frac{1}{2}\right)$, $D_1=\{s\,|\,|s|<c_1, s\neq 0$,且 s 不为负实数$\}$, D_1 是复 s 平面上的一个开连通集。当 $s\in D_1$ 时,由定理 1.3.5 的(i) 和定理 1.4.6,得到

$$\xi(s,\chi) = L(s,\chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)$$

$$= \exp\left(as+b+\sum_{n\geqslant 1}\left(\log\left(1-\frac{s}{z_n}\right)+\frac{s}{z_n}\right)\right),$$

其中对数函数取主分支。可与定理 1.4.6 证明的(a) 部分中证明级数 $\sum{}'F_n(z)$ 为 D 上解析函数且式(19) 成立类似地,证得级数

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\log\left(1-\frac{s}{z_n}\right)+\frac{s}{z_n}\right)$$

为 D_1 上解析函数,且

$$\left(\sum_{n\geqslant 1}\left(\log\left(1-\frac{s}{z_n}\right)+\frac{s}{z_n}\right)\right)' = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)。$$

因此,根据式(35) 求导,对于 $s\in D_1$,可得

$$L'(s,\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)+$$

$$L(s,\chi)\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{q}{\pi}\right)\right)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)$$

$$+L(s,\chi)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right)$$

$$= \xi(s,\chi)\cdot\left(a + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n}\right)\right),$$

再用 $\xi(s,\chi)$ 除等式两边即得(34)。

(b) 因为 $L(s,\chi)$ 在 $D(\chi)$ 上解析,且当 $s \in D(\chi)$ 时 $L(s,\chi) \neq 0$,所以 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 在 $D(\chi)$ 上解析。因此,为证明(34) 当 $s \in D(\chi)$ 时成立,根据解析开拓原理和已证明的结论,即(34) 当 $s \in D_1$ 时成立,我们仅需证明(34) 右端的函数是 $D(\chi)$ 上解析的。由定理 1.1.5 的(ii),可知 $\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)$ 在 $D(\chi)$ 上解析。我们要应用引理 1.3.4 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha),\ F_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - z_n} + \frac{1}{z_n},$$

在 $D(\chi)$ 中的任一点 α_0 处可导,且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)\right)'\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n'(\alpha_0)。$$

由于非常数的解析函数在任一有界区域内仅可能有有限个零点,所以仅有有限个 z_i 满足 $|\alpha_0 - z_i| < 1$。因此我们有 $c_2 = \inf\limits_{i\geqslant 1}|\alpha_0 - z_i| > 0$。令 $\delta = \min\left(\frac{1}{2}c_2, \frac{1}{2}\right)$。则当 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 时,对 $\xi(s,\chi)$ 的任一零点 z_i,都有

$$|\alpha - z_i| \geqslant |\alpha_0 - z_i| - |\alpha_0 - \alpha| \geqslant c_2 - \delta > 0,$$

因此 $\alpha \neq z_i, i \geqslant 1$。设 N 为充分大正整数,使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n| > 2|\alpha|$。则当 $M > N$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{N\leqslant n\leqslant M}|F_n(\alpha)| &\leqslant \sum_{N\leqslant n\leqslant M}\frac{|\alpha|}{|z_n(\alpha - z_n)|}\\ &\leqslant 2|\alpha|\cdot\sum_{n\geqslant N}|z_n|^{-2},\end{aligned}$$

由此可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 时绝对收敛。当 $0 <$

$|\delta_1| < \delta$ 时,我们有

$$|F_n(\alpha_0) - F_n(\alpha_0 + \delta_1)| = \frac{|\delta_1|}{|(\alpha_0 - z_n)(\alpha_0 + \delta_1 - z_n)|}$$
$$\leqslant \frac{2|\delta_1|}{|\alpha_0 - z_n|^2} \leqslant \frac{2\delta_1}{c_2^2},$$

这是因为 $|\alpha_0 + \delta_1 - z_n| \geqslant |z_n - \alpha_0| - \delta_1 \geqslant \frac{1}{2}|z_n - \alpha_0|$。设 m 为最小的满足 $|z_m| \geqslant 2|\alpha_0| + 1$ 的正整数。则当 $n \geqslant m$ 时,由

$$|\alpha_0 - z_n| \geqslant |z_n| - |\alpha_0| \geqslant \frac{1}{2}|z_n|,$$

$$|\alpha_0 + \delta_1 - z_n| \geqslant |z_n| - \delta - |\alpha_0| \geqslant \frac{1}{2}|z_n|,$$

还有

$$|F_n(\alpha_0) - F_n(\alpha_0 + \delta_1)| \leqslant \frac{4\delta_1}{|z_n|^2}。$$

又

$$|F_n'(\alpha_0)| = \left|\frac{1}{(\alpha_0 - z_n)^2}\right| \leqslant \begin{cases} c_2^{-2}, & 若\ n < m, \\ \dfrac{4}{|z_n|^2}, & 若\ n \geqslant m。\end{cases}$$

因此,由引理1.3.4可知 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导。由于 α_0 是任意的 $D(\chi)$ 中的数,我们得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 为 $D(\chi)$ 上的解析函数。于是(34) 右端的函数在 $D(\chi)$ 上解析。由解析开拓就可知当 $s \in D(\chi)$ 时(34) 总成立。

设 $D_2 = \{s | s \neq z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$,$D_2$ 是复 s 平面中的开连通集。应用定理 1.4.6,我们可与(34) 类似地证明,当 $s \in D_2$ 时,

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = a(\chi) + \sum_{n \geqslant 1}\left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n}\right)。$$

确切地说,令 $D_3 = \left\{s \mid |s| < \frac{1}{2}|z_1|\right\}$,则 $D_3 \subset D_2$。当 $s \in D_3$ 时,类似于(35),应用定理 1.4.6 我们有

$$\xi(s,\chi) = \exp\left(as + b + \sum_{n\geq 1}\left(\log\left(1 - \frac{s}{z_n}\right) + \frac{s}{z_n}\right)\right)。\quad (36)$$

这里对数函数取主分支,即使得 $\log 1 = 0$。然后,可同样地证明,级数

$$\sum_{n\geq 1}\left(\log\left(1 - \frac{s}{z_n}\right) + \frac{s}{z_n}\right)$$

为 D_3 上解析函数,且

$$\left(\sum_{n\geq 1}\left(\log\left(1 - \frac{s}{z_n}\right) + \frac{s}{z_n}\right)\right)' = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n}\right)。$$

因此,在(36) 两边对 s 可导,可得

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = \alpha(\chi) + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n}\right)。\quad (37)$$

虽然(37) 是在 $s \in D_3$ 时证明的,但在(b) 中实际上已证明(37) 右边的级数是 D_2 上的解析函数,因此由解析开拓可知(37) 在 D_2 上成立。由定理 1.3.5 的(i),对所有复数 s,我们有

$$\xi(s,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^{\delta}(\sqrt{q})}\xi(1 - s,\overline{\chi})。\quad (38)$$

两边对 s 求导可得

$$\xi'(s,\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{i^{\delta}(\sqrt{q})}\xi'(1 - s,\overline{\chi})。$$

因此,当 $s \in D_2$ 时

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = -\frac{\xi'(1 - s,\overline{\chi})}{\xi(1 - s,\overline{\chi})}。\quad (39)$$

由定理 1.3.5 的(i) 中给出的 $\xi(z,\chi)$ 带有积分的表达式,容易验证有

$$\overline{\xi(\bar{z},\bar{\chi})} = \xi(z,\chi)。\tag{40}$$

由此出发,根据导数的定义可得

$$\overline{\xi'(\bar{s},\bar{\chi})} = \xi'(s,\chi)。\tag{41}$$

由(40)及(41)可得

$$\frac{\xi'(1-s,\bar{\chi})}{\xi(1-s,\bar{\chi})} = \overline{\left(\frac{\xi'(1-\bar{s},\chi)}{\xi(1-\bar{s},\chi)}\right)}, s \in D_2。\tag{42}$$

由(39)及(42)可得

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = -\overline{\left(\frac{\xi'(1-\bar{s},\chi)}{\xi(1-\bar{s},\chi)}\right)}, s \in D_2。\tag{43}$$

令 $s = 0$,可得($\overline{(\ )}$ 表示对括号内的复数取共轭)

$$\frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)} = -\overline{\left(\frac{\xi'(1,\chi)}{\xi(1,\chi)}\right)}。\tag{44}$$

由(38)及(44),我们有

$$\begin{aligned} a(\chi) &= -\overline{\left(a(\chi) + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)} \\ &= -\overline{a(\chi)} - \overline{\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}(a(\chi)) &= -\overline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)} = -\mathrm{Re}\overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)} \\ &= -\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right) \\ &= -\mathrm{Re}\left(\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)\right)。 \end{aligned}\tag{45}$$

因为(注意:$\mathrm{Re}(1-z_i)^{-1} \geq 0, \mathrm{Re}z_i^{-1} \geq 0, i \geq 1$)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Re}\left(\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)\right) - \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n>M}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right) \leq \sum_{n>M}\frac{1}{|(1-z_n)z_n|}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)\right) &= \lim_{M\to\infty}\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{1}{1-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{M}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right)+\sum_{n=1}^{M}\operatorname{Re}\frac{1}{z_n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right);\end{aligned}\tag{46}$$

这里我们注意到两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right)\text{及}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)$$

都是绝对收敛的,这是因为

$$0\leqslant\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right)\leqslant\frac{1}{|1-z_n|^2},\quad 0\leqslant\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)\leqslant\frac{1}{|z_n|^2},$$

而 $\sum\limits_{n\geqslant1}|z_n|^{-2}<\infty$。为说明这两个级数收敛于同一个值,我们指出:$1-\bar{z}_1,1-\bar{z}_2,\cdots$,是 $z_1,z_2,\cdots$,的一个适当排列。首先,由(37)可知,每个 $1-\bar{z}_i$ 都是 $\xi(s,\chi)$ 的根,而若 z_j 是一个根,则由于 $1-\bar{z}_j$ 也是根,所以 $1-\bar{z}_j=z_k$,从而 $z_j=1-\bar{z}_k$。因此,排列 $1-\bar{z}_1$, $1-\bar{z}_2,\cdots$ 中包含 $\xi(s,\chi)$ 所有的根。我们要进一步说明的是,若 z 为 $\xi(s,\chi)$ 的 h 阶零点,则 $1-\bar{z}$ 也为 $\xi(s,\chi)$ 的 h 重零点。这可通过在(38)两边连续求 1 至 h 阶导数而得证,因为 s_0 是 $\xi(s,\chi)$ 的 h 阶零点的判断准则是

$$\xi(s_0,\chi)=\xi'(s_0,\chi)=\cdots=\xi^{(h-1)}(s_0,\chi)=0,$$

$$\xi^{(h)}(s_0,\chi)\neq0,$$

这里 $\xi^{(i)}(s,\chi)$ 为 $\xi(s,\chi)$ 的 i 阶导函数。由此,我们断言:若 z 为 $\xi(s,\chi)$ 的一个 h 阶零点,则 z 在序列

$$1-\bar{z}_1,1-\bar{z}_2,\cdots,1-\bar{z}_n,\cdots,$$

中恰好重复出现 h 次。这是因为,$1-\bar{z}$ 也是 $\xi(s,\chi)$ 的一个 h 阶零

点,因此,它在序列

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$$

中重复出现恰好 h 次。这就证明了序列 $1-\bar{z}, 1-\bar{z}_2, \cdots$,是序列 $z_1, z_2, \cdots$,是一个重排。这样,对任意充分大的正数 M,既有

$$\sum_{n \leqslant M} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right),$$

又有

$$\sum_{n \leqslant M} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right)。$$

由此,若令 $M \to \infty$,则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{z}_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)。$$

由(45) 及(46),就得到

$$\mathrm{Re}(a(\chi)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)。$$

证毕。

关于定理 1.3.5 的(ii) 中的引入的整函数 $\xi(s)$,我们有

定理 1.4.8 (i)$\xi(s)$ 是一阶整函数。

(ii)$\xi(s)$ 有可列无穷多个零点 ρ,它们都满足 $0 \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1$, $\rho \neq 0,1$,并且可按绝对值增长的一种排列,将这些零点排列为 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n, \cdots$,即 $|\rho_1| \leqslant |\rho_2| \leqslant \cdots \leqslant |\rho_n| \leqslant \cdots$,其中每个零点是几阶的就重复排列几次。对任给 $\varepsilon > 0$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} |\rho_n|^{-1-\varepsilon} < \infty$。$\rho_1, \rho_2, \cdots$,就是 $\zeta(s)$ 的全部非平凡零点。

(iii)$\xi(s)$ 有无穷乘积展开,即

$$\xi(s) = e^{As+B} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n},$$

这里 A 与 B 为绝对常数,无穷乘积的值定义为

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{|\rho_n|\leqslant x}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}。$$

证明:(i) 可与引理 1.4.1 类似地加以证明。

应用(i),定理 1.1.5,定理 1.3.5 的(ii),引理 1.4.2,引理 1.4.3,以及解析开拓原理,(ii) 可与引理 1.4.5 类似地证明。

应用(i),(ii),引理 1.3.4,引理 1.4.2,解析函数的最大模原理,引理 1.4.3,可与定理 1.4.6 类似地证明(iii)。

证毕。

由定理 1.4.8 可得

推论 1.4.9　令 $D=\{s\mid s\neq 1,-2,-4,-6,\cdots,\rho_1,\rho_2,\cdots,\}$,其中 $-2,-4,-6,\cdots$,为 $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$ 的全部极点,也为 $\zeta(s)$ 的全部平凡零点,1 为 $\zeta(s)$ 的唯一极点,$\rho_1,\rho_2,\cdots$,为 $\xi(s)$ 的全部零点,也即 $\zeta(s)$ 的全部非平凡零点,它们满足

$$\rho_i\neq 1,0\leqslant \mathrm{Re}\rho_i\leqslant 1,0<|\rho_1|\leqslant|\rho_2|\leqslant\cdots,$$

且对任给 $\varepsilon>0$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\rho_n|^{-1-\varepsilon}<\infty$。$D$ 为一个开连通集,且当 $s\in D$ 时,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{2}\log\pi-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}+A+\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right),\tag{47}$$

其中 $A=\dfrac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\dfrac{1}{2}\log\pi+\dfrac{1}{2}\Gamma'(1)-1$。

证明:可以用由定理 1.4.6 导出推论 1.4.7 的类似方法,应用定理 1.3.5 的(ii)、定理 1.4.8、引理 1.3.4、定理 1.1.5 以及解析开拓原理证明(47)。至于 A 的值,在(47) 中取 $s=0$ 即可得到。**证毕**。

练　　习

（Ⅰ）若 χ 是模 q 的非主特征，它是由模 q_1 的原特征 χ_1 诱导出的，$q_1 \mid q$，证明

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p \mid q \\ p \nmid q_1}}(1 - \chi_1(p)p^{-s})。$$

由此并应用 §1.4 的(6)，证明存在无穷多个满足 $p \equiv 1(\bmod q)$ 的素数 p。

（Ⅱ）设 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$，是 $\xi(s,\chi)$ 全部零点的一个排列，$|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_n| \leqslant \cdots$，证明

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{|z_n| \leqslant x}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n} = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}。$$

（Ⅲ）若 $q \geqslant 3$，χ 为模 q 的实原特征，$\chi(-1) = -1$，应用函数方程(定理 1.3.5) 及定理 1.4.4，证明 $L(0,\chi) > 0$。

§1.5　L 函数的零点分布

在本节中 $c_1, c_2, \cdots$ 将代表一些正的绝对常数。由 §1.4 的(33)，我们知道

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}, \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{1}$$

其中 χ 为模 q 的任一特征。当 χ 为原特征时，在推论 1.4.7 中，我们获得了用 $L(s,\chi)$ 的可列无穷多个非平凡零点所作的 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 的无穷级数表达式。但 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点是怎样分布的？由引理 1.4.4，我们知道 $L(1,\chi) \neq 0$。由此可得：存在 δ

>0，δ 依赖于 q，使得当 $|s-1|<\delta$ 时，$L(s,\chi)\neq 0$。因此，若 $s=\sigma+it$，则在 σ 与 1 很近，且 $|t|$ 很小时，$L(s,\chi)\neq 0$。但这个结果的价值是很小的，因为 δ 究竟是多大的一个量我们是不知道的，且我们知道随着 $|t|$ 充分地大，$L(s,\chi)$ 的零点 $s=\sigma+it$ 的个数才会任意地多，因此，若要求 $|t|<\delta$，就对于 $L(s,\chi)$ 的零点所知甚少了。这里要证明：对 $L(s,\chi)$ 的每个零点 $\rho=\beta+it$，差 $1-\beta$ 都有一个定量的下界，这个下界与 q 及 t 有关。先证明一个引理。

引理 1.5.1　(i) 设 χ 为模 q 的非主特征，χ_1 为模 q_1 的原特征，χ_1 诱导出 χ，即 $\chi=\chi\chi_0$，χ_0 为模 q 的主特征。则当 $\mathrm{Re}s=\sigma>1$ 时

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)}+2\theta_1\log q,\ |\theta_1|\leqslant 1。$$

(ii) 设 χ_0 为模 q 的主特征，$\mathrm{Re}s=\sigma>1$，则

$$\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}=\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+2\theta_2\log q,\ |\theta_2|\leqslant 1。$$

(iii) 设 χ 为模 q 的任一特征，$\sigma>1$，t 为任意实数，则

$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)+4\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right)+\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right)\geqslant 0。\tag{2}$$

(iv) 设 $s=\sigma+it$，$\sigma\in(1,2)$，t 为实数，则

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}+O(\log(|t|+2))。$$

(v) 设 χ 为模 q 的原特征，$s=\sigma+it$，$\sigma\in(1,2)$，t 为实数，$\beta+it$ 为 $L(z,\chi)$ 的一个非平凡的零点，则

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)\leqslant-\frac{1}{\sigma-\beta}+O(\log(q(|t|+2)))。$$

(vi) 设 χ 为模 q 的任一非主特征，$s=\sigma+it$，$\sigma\in(1,2)$，t 为实数，则

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)\leqslant c_1\log(q(|t|+2))。$$

证明：(i) 当 $\operatorname{Re}s>1$ 时，由无穷乘积表达式可得

$$\begin{aligned}L(s,\chi)&=L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)\\&=L(s,\chi_1)\exp\left(\sum_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\log(1-\chi_1(p)p^{-s})\right),\end{aligned}$$

这里对数函数取主分支。据此，对 s 求导可得

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)}+\prod_{\substack{p\mid q\\ p\mid q_1}}\frac{\chi_1(p)\log p}{p^s-\chi_1(p)}。$$

因为

$$\left|\sum_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\frac{\chi_1(p)\log p}{p^s-\chi_1(p)}\right|\leqslant\sum_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\frac{\log p}{p-1}\leqslant 2\sum_{p\mid q}\log p\leqslant 2\log q,$$

(i) 得证。

(ii) 应用

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p\mid q}(1-p^{-s}),\operatorname{Re}s>1,$$

可与(i) 类似地证明(ii)。

(iii) 与(1) 类似地可证明

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\operatorname{Re}s>1。$$

因此，由(1) 可知(2) 式的左边为(注意：由级数绝对收敛，可知和的实部等于实部的和，即“Re” 与 $\sum\limits_n$ 可交换)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3+4\mathrm{Re}\omega(n)+\mathrm{Re}(\omega(n))^2)\Lambda(n)n^{-\sigma},$$

这里 $\omega(n)=\chi(n)n^{-it}$。若设 $\omega(n)=e^{i\theta}$,则

$$\begin{aligned}3+4\mathrm{Re}\omega(n)+\mathrm{Re}(\omega(n))^2&=3+4\cos\theta+\cos 2\theta\\&=2(\cos\theta+1)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以(iii) 成立。

(iv) 由推论 1.4.9 可得

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}g(s)+O(1),g(s)=\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}。$$

若 $|t|\leqslant 2$,则由于函数 $g(s)$ 在闭集 $\{s|s=\sigma+\mathrm{i}t,1\leqslant\sigma\leqslant 3,|t|\leqslant 1\}$ 中连续,$g(s)=O(1)$。若 $|t|>2$,由定理 1.1.5 的(v) 可得

$$g(s)=O(\log(|t|+2))。$$

(iv) 得证。

(v) 由推论 1.4.7,我们有

$$\begin{aligned}-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}&=\frac{1}{2}g(s,\chi)-a(\chi)+O(\log q)\\&\quad-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s-z_n}+\frac{1}{z_n}\right),\end{aligned}$$

其中 $g(s,\chi)=\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)$。可与(iv) 的证明中估计 $g(s)$ 类似地得

$$g(s,\chi)=O(\log(|t|+2))。$$

因此,我们有(参见 §1.4 的(46) 式中的推导)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)&=-\mathrm{Re}(a(\chi))-\mathrm{Re}\left(\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{s-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\right)\\&\quad+O(\log(q(|t|+2)))\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-z_n}+\frac{1}{z_n}\right)\end{aligned}$$

$$+ O(\log(q(|t| + 2)))$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - z_n}\right) + O(\log(q(|t| + 2)))。\quad (3)$$

由于对每个 n 都有 $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - z_n}\right) \geqslant 0$，特别地，若设 $z_k = \beta + it$，则因为 $s = \sigma + it$，由(3)可得

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) \leqslant -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - z_k}\right) + O(\log(q(|t| + 2)))$$

$$= -\frac{1}{\sigma - \beta} + O(\log(q(|t| + 2)))。$$

(iv) 证毕。

(vi) 设 χ 是 χ_1 诱导的，χ_1 为模 q_1 的原特征，$q_1 | q$，$q_1 \geqslant 3$。由(1)和(3)式立即可知(vi)成立。

引理**证毕**。

关于 L 函数的零点分布，我们有

定理 1.5.2 设 $Q \geqslant 3$，则存在 $c_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使得整函数

$$G(s) = \prod_{3 \leqslant q \leqslant Q} \prod_{\chi \bmod q}{}^{*} L(s,\chi)$$

仅可能有一个零点 $\rho = \beta + it$，满足 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$，$\rho \neq 0,1$，以及

$$1 - \beta \leqslant \frac{c_2}{\log(Q(|t| + 2))}, \quad (4)$$

这里 $\prod\limits_{\chi \bmod q}^{*}$ 表示对模 q 所有的原特征求积。并且，当这个零点存在时，它是 $G(s)$ 的实的单阶零点，我们记之为 $\tilde{\beta}$，它使得 $L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) = 0$ 对某个模 $\tilde{q}$ 的实原特征 $\tilde{\chi}$ 成立，$3 \leqslant \tilde{q} \leqslant Q$。于是，三元组($\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta}$)或不存在，或对所有的模 $q(3 \leqslant q \leqslant Q)$、模 q 的所有原特征 χ，以及 $L(s,\chi)$ 的所有非平凡零点 ρ 所组成的三元组(q, χ, ρ)而言是唯一的，即若($\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta}$)不存在，或虽存在，但

$(q,\chi,\rho)\neq(\tilde{q},\tilde{\chi},\tilde{\beta})$，则有

$$\rho=\beta+it,1-\beta>\frac{c_2}{\log(Q(|t|+2))}。\tag{5}$$

我们称这个三元组$(\tilde{q},\tilde{\chi},\tilde{\beta})$为 Q- 例外组，$(\tilde{q},\tilde{\chi})$为 Q- 例外对，$\tilde{q}$为 Q 例外模，$\tilde{\chi}$ 为 Q- 例外特征，而 $\tilde{\beta}$ 则为 Q- 例外零点。

定理1.5.2的证明实际上由几个引理组成。以下 $c_i(i\geqslant 3)$ 表示若干正绝对常数。

引理1.5.3 设 $q\geqslant 3$，χ 为模 q 的一个复的原特征，$\rho=\beta+it$ 为$L(s,\chi)$的一个非平凡零点，则

$$1-\beta>\frac{c_3}{\log(q(|t|+2))}。$$

证明：设 $\sigma\in(1,2)$，简记 $\log(q(|t|+2))=L$。由引理1.5.1的(iii)，(iv)，(v) 和(vi)，可得

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+c_4L\geqslant 0。$$

令 $\sigma=\min(1+c_5L^{-1},2)$，$c_5=\min\left(\frac{1}{2}c_4^{-1},\frac{1}{10}\right)$，则由

$$\frac{1}{\sigma-1}\leqslant c_5^{-1}L_1+1<(c_5^{-1}+1)L,$$

可得

$$1-\beta>\frac{c_3}{L},c_3=(5(33+7c_4))^{-1}。$$

证毕。

引理1.5.4 设 $q\geqslant 3$，χ 为模 q 的一个实原特征，$\rho=\beta+it$ 为 $L(s,\chi)$ 的一个非平凡零点，$t\neq 0$，则

$$1-\beta>\frac{c_6}{\log(q(|t|+2))}。$$

证明：这时 $\chi^2=\chi_0$。设 $\sigma\in(1,2)$。简记 $\log(q(|t|+2))=$

L。则由引理 1.5.1 的(ii),(iii) 和(iv) 可得

$$\frac{3}{\sigma-1}+\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right)+$$

$$4\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right)+c_7L\geqslant 0。\tag{6}$$

显然

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right)=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2}。\tag{7}$$

由 $\xi(\overline{\rho},\overline{\chi})=\xi(\overline{\rho},\chi)=\overline{\xi(\rho,\chi)}=0$,可知 $\overline{\rho}$ 也为$\xi(s,\chi)$ 的零点,即为 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点,且 $\overline{\rho}\neq\rho$。因此,由(3) 可知

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right)\leqslant-\frac{1}{\sigma-\beta}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\beta+it}\right)+O(L)$$

$$=-\frac{1}{\sigma-\beta}-\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+4t^2}+O(L)。\tag{8}$$

由(6),(7) 及(8) 可得

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}-\frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+4t^2}$$

$$+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2}+\tilde{c}_7L\geqslant 0。\tag{9}$$

取 $\sigma=\min(1+c_8L^{-1},2)$,$c_8=\min\left(\frac{1}{3}\tilde{c}_7^{-1},\frac{1}{35}\right)$。因此,当$|t|\geqslant\frac{1}{2}(\sigma-1)$ 时,由(9) 及

$$\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma-1},$$

我们得

$$\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+\tilde{c}_7L>0,$$

$$1-\beta>\left(15\left(\frac{7}{2}\tilde{c}_8^{-1}+\tilde{c}_7+3.5\right)\right)^{-1}L^{-1}。\tag{10}$$

当 $0<|t|<\frac{1}{2}(\sigma-1)<\frac{1}{2}(\sigma-\beta)$ 时，由(9)以及

$$-\frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+4t^2}<-\frac{2}{\sigma-\beta},$$

$$\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2}<\frac{1}{\sigma-1},$$

我们又得

$$\frac{4}{\sigma-1}-\frac{6}{\sigma-\beta}+\tilde{c}_7L>0,$$

从而有

$$1-\beta>\frac{163}{105}(4c_8^{-1}+\tilde{c}_7+4)^{-1}L^{-1}。\tag{11}$$

由(10)及(11)可得所需结论。**证毕**。

引理1.5.5　设 $q\geqslant 3$，χ 为模 q 的任一实原特征，$L(s,\chi)$ 有实根 β_1 与 β_2，$\beta_1\neq\beta_2$，$0\leqslant\beta_1,\beta_2\leqslant 1$，则有

$$1-\min(\beta_1,\beta_2)>\frac{c_9}{\log q}。$$

证明：当 $\sigma\in(1,2)$ 时，我们有不等式：

$$\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}=\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)n^{-\sigma}(1+\chi(n))\geqslant 0。\tag{12}$$

应用引理1.5.1的(iv)以及(3)式，我们有

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}=\frac{1}{\sigma-1}+O(1),$$

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}\leqslant-\frac{1}{\sigma-\beta_1}-\frac{1}{\sigma-\beta_2}+O(\log q)$$

$$\leqslant-\frac{2}{\sigma-\beta}+O(\log q),$$

其中 $\beta=\min(\beta_1,\beta_2)$。因此由(12)得

$$\frac{1}{\sigma-1}-\frac{2}{\sigma-\beta}+c_{10}\log q\geqslant 0。$$

取 $\sigma = \min(1 + c_{11}(\log q)^{-1}, 2)$, $c_{11} = \min\left(\frac{1}{2}c_{10}^{-1}, \frac{1}{3}\right)$,我们得(应用 $\log q \geqslant 1$)

$$1 - \beta > c_9(\log q)^{-1}, \quad c_9 = (6(c_{11}^{-1} + c_{10} + 1))^{-1}。$$

证毕。

引理1.5.6 设 $q \geqslant 3$, χ 为模 q 的一个实原特征,$L(s,\chi)$ 以实数 β 为阶数 $\geqslant 2$ 的非平凡零点,则

$$1 - \beta > \frac{c_{12}}{\log q}。$$

证明:这可与引理1.5.5类似地证明,即仍在 $\sigma \in (1,2)$ 时应用(12)。只需注意到,这时由(3)式我们有

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} \leqslant -\frac{2}{\sigma - \beta} + O(\log q);$$

这是因为,若设 β 为 h 阶非平凡零点,则 $-\frac{1}{\sigma - \beta}$ 一项在(3)式右端的无穷级数中恰好被重复叠加了 h 次。**证毕**。

引理1.5.7 若 χ_i 为模 q_i 的实原特征,$3 \leqslant q_i \leqslant Q$, $i = 1, 2$, $L(s,\chi_i)$ 以 β_i 为非平凡实零点,且 $\chi_1 \neq \chi_2$,则

$$1 - \min(\beta_1, \beta_2) > \frac{c_{13}}{\log Q}。$$

证明:由 §1.2 可知 $\chi_1\chi_2$ 可视为模 $[q_1, q_2]$ 的特征,而由定理1.2.2的(vi)可知 $\chi_1\chi_2$ 不为主特征。设 $\sigma \in (1,2)$。我们有不等式:

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma,\chi_1)}{L(\sigma,\chi_1)} - \frac{L'(\sigma,\chi_2)}{L(\sigma,\chi_2)} - \frac{L'(\sigma,\chi_1\chi_2)}{L(\sigma,\chi_1\chi_2)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1 + \chi_1(n) + \chi_2(n) + \chi_1(n)\chi_2(n))n^{-\sigma}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n))n^{-\sigma} \geqslant 0。$$

由引理1.5.1的(iv),(v)及(vi),我们得

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}=\frac{1}{\sigma-1}+O(1),$$

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_i)}{L(\sigma,\chi_i)}\leqslant-\frac{1}{\sigma-\beta_i}+O(\log Q),i=1,2,$$

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_1\chi_2)}{L(\sigma,\chi_1\chi_2)}\leqslant c_1\log(2Q)。$$

因此,我们得到

$$\frac{1}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma-\beta_1}-\frac{1}{\sigma-\beta_2}+c_{14}\log Q\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{\sigma-1}-\frac{2}{\sigma-\min(\beta_1,\beta_2)}+c_{14}\log Q>0。$$

取 $\sigma=\min(1+c_{15}(\log Q)^{-1},2),c_{15}=\min\left(\frac{1}{3}c_{14}^{-1},\frac{1}{3}\right)$,则由

$$\frac{1}{\sigma-1}\leqslant c_{15}^{-1}\log Q+1<(c_{15}^{-1}+1)\log Q,$$

可得

$$1-\beta>c_{13}(\log Q)^{-1},c_{13}=(3(1+c_{14}+c_{15}^{-1}))^{-1}。$$

证毕。

定理 1.5.2 的证明:令 $c_2=\min(c_3,c_6,c_9,c_{12},c_{13},\frac{1}{2})$。设 $\rho=\beta+it$ 为 $G(s)$ 的一个根,$0\leqslant\beta\leqslant 1$,$t$ 为实数,$\rho\neq 0,1$,则 $L(\rho,\chi)=0$,这里对某个 q,χ 为模 q 的某原特征,$3\leqslant q\leqslant Q$。若 ρ 不是实的或 χ 不是实的,则由引理 1.5.3 和引理 1.5.4,可知(5)成立。设 ρ 是实的,$\rho=\beta$,且 χ 是实的。若 β 为 $G(s)$ 的阶数 $\geqslant 2$ 的零点,则不外乎出现两种情况:

(i) β 为 $L(s,\chi)$ 的阶数 $\geqslant 2$ 的实零点;

(ii) β 为 $L(s,\chi)$ 的 1 阶实零点,又为某个 $L(s,\chi_1)$ 的实零点,$\chi\neq\chi_1$,χ_1 为模 q_1 的某个原特征。

对于情况(i),由引理 1.5.6 可知(5)成立,对于情况(ii),按

χ_1 是复的或实的，分别应用引理 1.5.3 和引理 1.5.7，可知(5) 式成立。因此，我们的讨论证明了：若 ρ 为 $G(s)$ 的零点，$0 \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1, \rho \neq 0,1, \rho = \beta + it$ 满足(4) 式，则 ρ 只可能是 $G(s)$ 的 1 阶实零点，$\rho = \beta$，且相应的使得 $L(\rho,\chi) = 0$ 的模 $q(3 \leqslant q \leqslant Q)$ 的原特征 χ 为实原特征。进一步应用引理 1.5.5 和引理 1.5.7，我们还知道 $G(s)$ 仅可能有一个满足(4) 式的 1 阶实零点。这就完成了定理 1.5.2 的证明。

对于 $\zeta(s)$，我们有

定理 1.5.8 若 $\rho = \beta + it$ 为 $\zeta(s)$ 的任意一个非平凡零点，则

$$1 - \beta > \frac{c_{16}}{\log(|t| + 2)}。$$

为证明定理 1.5.8，先证明一个引理。

引理 1.5.9 当 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 以及

$$|t| < \sqrt{\left(2\left((\pi e^{\pi})^{-1} + \left(\frac{15}{4}\pi^2 e^{\frac{5}{2}\pi}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} - 1}$$

时(t 为实数)，$\zeta(\sigma + it) \neq 0$。

证明：由定理 1.3.5 的(ii)，我们仅需证明 $\xi(\sigma + it) \neq 0$。设 $s = \sigma + it$。我们有

$$\begin{aligned} |\xi(\sigma + it)| \geqslant 1 - |s(s-1)| \\ \cdot \int_1^{\infty} (2u^{-\frac{1}{2}}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}\right) \mathrm{d}u。\end{aligned} \tag{13}$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} = e^{-\pi u}\left(1 + \sum_{n \geqslant 2} e^{-\pi(n^2-1)u}\right),$$

而当 $n \geqslant 2$ 时，$n^2 - 1 \geqslant \frac{3}{2}n$，所以

$$\sum_{n \geqslant 1} e^{-\pi n^2 u} \leqslant e^{-\pi u}\left(1 + \sum_{n \geqslant 2} e^{-\frac{3}{2}\pi n u}\right) = e^{-\pi u}\left(1 + \frac{e^{-3\pi u}}{1 - e^{-\frac{3}{2}\pi u}}\right)$$

$$= e^{-\pi u}\left(1+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi u}}{e^{(3\pi u)/2}-1}\right) \leqslant e^{-\pi u}\left(1+e^{(3\pi u)/2}\left(\frac{3}{2}\pi u\right)^{-1}\right),$$

$$\int_1^\infty (2u^{-\frac{1}{2}})\Big(\sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n^2 u}\Big)\,\mathrm{d}u \leqslant 2\int_1^\infty \left(e^{-\pi u}+\frac{2}{3\pi}e^{-(5\pi u)/2}\right)\mathrm{d}u$$

$$\leqslant 2\left((\pi \mathrm{e}^{\pi})^{-1}+\frac{4}{15\pi^2}e^{-(5\pi u)/2}\right)。$$

因此,由(13)以及$|s(s-1)| \leqslant t^2+1$,可得引理 1.5.9。**证毕**。

定理 1.5.8 的证明:设$\rho=\beta+it$为$\zeta(s)$的一个非平凡零点,$0\leqslant\beta\leqslant 1$,$t$为实数,且$|t|\geqslant 1$。设$\sigma\in(1,2)$,与引理 1.5.1 的(iii)类似地,可证得

$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)+4\mathrm{Re}\left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right)$$
$$+\mathrm{Re}\left(-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right)\geqslant 0。\tag{14}$$

简记$L=\log(|t|+2)$。应用推论 1.4.9,可与引理 1.5.1 的(iv)与(v)类似地证得(参见(3)式的推导,注意:$\mathrm{Re}((\sigma+it-\rho_n)^{-1})\geqslant 0$,$\mathrm{Re}\rho_n^{-1}\geqslant 0$)

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-1}\right)+O(L)$$
$$-\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)\right)$$
$$\leqslant -\frac{1}{\sigma-\beta}+O(L),\tag{15}$$

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right)\leqslant \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right)+O(L)=O(L)。\tag{16}$$

因此,由引理 1.5.1 的(iv),(14),(15)及(16),可得

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+c_{17}L\geqslant 0。\tag{17}$$

取$\sigma=\min(1+c_{18}L^{-1},2)$,$c_{18}=\min\left(\frac{1}{2}c_{17}^{-1},\frac{1}{12}\right)$,则由

$$\frac{1}{\sigma - 1} \leqslant c_{18}^{-1}L + 1 < (c_{18}^{-1} + 1)L$$

及(17)可得

$$1 - \beta > c_{16}L^{-1}, c_{16} = (4(c_{17} + 3c_{18}^{-1} + 3))^{-1}。$$

若$|t| < 1$,则由于

$$\sqrt{\left(2\left((\pi e^{\pi})^{-1} + \left(\frac{15}{4}\pi^2 e^{\frac{5}{2}\pi}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} - 1} > 1,$$

由引理 1.5.9 可知 $\zeta(\beta + it) \neq 0$。**证毕**。

根据定理1.5.2,我们知道整函数 $G(s)$ 有可能存在唯一的实零点 $\tilde{\beta}$,它满足 $L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) = 0$,$\chi$ 为模 $\tilde{q}$ 的一个实原特征,$3 \leqslant \tilde{q} \leqslant Q$,以及 $1 - \tilde{\beta} \leqslant c_2/\log(2Q)$,即 $\tilde{\beta}$ 与 1 的距离"比较近",并且,定理1.5.2的证明方法无法给出差$1 - \tilde{\beta}$一个适当的下界估计。这个 $\tilde{\beta}$ 通常被称做"例外零点",它实际上是依赖于 Q 的。在本节的最后部分,我们将引进一种方法,用以给出 $1 - \tilde{\beta}$ 的非平凡下界。

我们继续探讨 L 函数非平凡零点的性质。我们有

定理 1.5.10 设 T 为实数,χ 为模 q 的原特征,$q \geqslant 3$,$\rho_n = \beta_n + ir_n$,$n = 1,2,\cdots$,为 $\xi(s,\chi)$ 所有的零点,也即 $L(s,\chi)$ 所有的非平凡零点,且$|\rho_1| \leqslant |\rho_2| \leqslant \cdots$。则有

(i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1 + (T - r_n)^2} \leqslant c_{26}\log(q(|T| + 2))$。

(ii) $\displaystyle\sum_{|T-r_n| \geqslant 1} |T - r_n|^{-2} \leqslant 2c_{26}\log(q(|t| + 2))$。

(iii)(a) 对任意的 T_1,$T_1 \geqslant 0$,满足 $T_1 \leqslant |r_n| \leqslant T_1 + 1$ 的零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 的个数 $\leqslant 4c_{26}\log(q(T_1 + 2))$。

(b) 设 $T \geqslant 2$,则满足$|r_n| \leqslant T$ 的零点个数为$O(T\log(qT))$。

(iv) 可以找到一个数 T',$T \leqslant T' \leqslant T + 1$,使得

$$|T' - r_n| \geqslant \frac{c_{27}}{\log(q(|T| + 2))}$$

对所有非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 成立。

(v) 若 $z = \beta + it$, $-2 \leqslant \beta \leqslant 3$, z 不与任一 ρ_n 相等,且 $|t| \geqslant \mu_1 > 0$,或 $0 < \mu_2 \leqslant |\beta| \leqslant \mu_3 < 2$,或 $\beta \geqslant 1$, μ_i 为常数,则

$$\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)} = \sum_{|t-r_n|<1} \frac{1}{z - \rho_n} + O(\log(q(|t| + 2))),$$

其中求和通过所有满足 $|t - r_n| < 1$ 的($\ll \log(q(|t| + 2))$ 个)非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$。

证明:(i) 从推论 1.4.7 的证明过程看,它对于任意的满足

$$0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_n| \leqslant \cdots$$

的 $\xi(s,\chi)$ 零点的一个排列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$,都是成立的。因此,在其中取 $s = 2 + iT$,并应用 § 1.4 的(33)式,以及引理 1.1.5 的(5)(注意:对数函数取主分支),可得

$$a(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{L'(2 + iT,\chi)}{L(2 + iT,\chi)} + \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{2 + iT + \delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2 + iT + \delta}{2}\right)} = O(\log(q(|t| + 2)))。\qquad (18)$$

因此,在(40)中取实部,并利用在推论 1.4.7 的证明中证明

$$\mathrm{Re}(a(\chi)) = -\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$$

时所采用的一些讨论(见 § 1.4 的(45) ~ (46)),可得

$$\mathrm{Re}\left(a(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)\right) = \mathrm{Re}(a(\chi))$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n}\right)$$

$$= \sum_{n\geqslant 1}\frac{2 - \beta_n}{(2 - \beta_n)^2 + (T - r_n)^2} = O(\log(qT))。$$

因为

$$\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-r_n)^2} \geqslant \frac{1}{4+(T-r_n)^2} \geqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+(T-r_n)^2},$$

所以(i) 成立。

(ii) 由于

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+(T-r_n)^2} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{|T-r_n|\geqslant 1} |T-r_n|^{-2},$$

由(i) 可知(ii) 成立。

(iii)(a) 由(i) 可知

$$\sum_{T_1\leqslant r_n\leqslant T_1+1} 1 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{1+(T_1-r_n)^2} \leqslant 2c_{26}\log(q(T_1+2)),$$

$$\sum_{T_1\leqslant -r_n\leqslant T_1+1} 1 = \sum_{-T_1\leqslant r_n\leqslant -T_1} 1 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{1+(-T_1-r_n)^2}$$
$$\leqslant 2c_{26}\log(q(T_1+2))。$$

因此可得

$$\sum_{T_1\leqslant |r_n|\leqslant T_1+1} 1 \leqslant 4c_{26}\cdot\log(q(T_1+2))。$$

(b) 在(i) 中取 $T=0$,可得

$$\sum_{|r_n|\leqslant 2} 1 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{5}{1+r_n^2} \leqslant 5c_{26}\log(2q)。$$

因此,对任意的 $T, T\geqslant 2$,由(a) 我们有

$$\sum_{|r_n|\leqslant T} 1 \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant [T]-1} \sum_{T-i-1\leqslant |r_n|\leqslant T-i} 1 + \sum_{|r_n|\leqslant 2} 1$$
$$\leqslant T(4c_{26}\log((T+1)q) + 17c_{26}\log(2q)$$
$$= O(T\log(qT))。$$

(iv) 由(i) 可知

$$\sum_{T\leqslant r_n\leqslant T+1} 1 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{1+(T-r_n)^2} \leqslant 2c_{26}L, L = \log(q(T+2))。$$

我们将区间$[N, N+1]$分成 $N=[(2c_{26}+1)L]+1$ 个等分的小

段,即

$$T = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = T + 1,$$

$$T_{k+1} - T_k = \frac{1}{N}, k = 0,1,\cdots,N-1。$$

相应地,复 s 平面上的矩形

$$D = \{s = \beta + ir \mid 0 \leqslant \beta \leqslant 1, T \leqslant r \leqslant T + 1\}$$

分成了 N 个形如

$$D_k = \{s = \beta + ir \mid 0 \leqslant \beta \leqslant 1, T_k \leqslant r \leqslant T_{k+1}\}$$

的小矩形,这里 $0 \leqslant k \leqslant N-1$。显然,至少一个 D_j 中不包含 $L(s,\chi)$ 的满足 $\rho = \beta + ir, 0 \leqslant \beta \leqslant 1, T \leqslant r \leqslant T+1$ 的零点 ρ。于是,若令 $T' = \frac{1}{2}(T_j + T_{j+1})$,则

$$|T' - r_n| \geqslant \frac{1}{2N} \geqslant \frac{1}{2((2c_{26}+1)L+1)} \geqslant \frac{1}{4(c_{26}+1)L}$$

对于 $L(s,\chi)$ 的任一非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + \mathrm{i}r_n$ 成立。令 $c_{27} = (4(c_{26}+1))^{-1}$ 即得所需。

(v) 应用推论 1.4.7,将其中的 s 分别用 $2+it$ 和 $z = \beta + it$ 代替(注意:z 不等于 $L(s,\chi)$ 的任一零点),然后将所得二式相减,可得

$$\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{z+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+\delta}{2}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{2+it+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+it+\delta}{2}\right)} + O(1)。\tag{19}$$

由对于 β 及 t 的假设,由定理 1.1.5 的(v) 可得

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{z+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+\delta}{2}\right)} = O(\log(|t|+2)),$$
$$\frac{\Gamma'\left(\frac{2+\mathrm{i}t+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+\mathrm{i}t+\delta}{2}\right)} = O(\log(|t|+2))。\tag{20}$$

又，当 $\rho_n = \beta_n + ir_n, |t - r_n| \geqslant 1$ 时

$$\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-z_n} = \frac{2-\beta}{(\beta-\beta_n+i(t-r_n))(2-\beta_n+i(t-r_n))}$$
$$\ll \frac{1}{|t-r_n|^2}。\tag{21}$$

由(ii) 我们有

$$\sum_{|t-r_n|\geqslant 1} |t-r_n|^{-2} \ll \log(q(|t|+2))。\tag{22}$$

由(19) ~ (22)，得到

$$\frac{L'(z,\chi)}{L(z,\chi)} = \sum_{|t-r_n|<1}\left(\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right) + O(\log(q(|t|+2)))。$$

由(i) 可得

$$\sum_{|t-r_n|<1} 1 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{1+(t-r_n)^2} = O(\log(q(|t|+2))),$$

因此(v) 成立。**证毕**。

类似地，对于 ζ 函数，应用推论 1.4.9 和定理 1.1.5 的(v)，可得

定理 1.5.11 设 T 为实数，$\rho_n = \beta_n + ir_n (n = 1,2,\cdots)$ 为整函数 $\xi(s)$ 按照绝对值大小排序（显然，不止一种排顺序的方法）的全部零点，也即 $\zeta(s)$ 的所有非平凡的零点。则

(i) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+(T-r_n)^2} \leqslant c_{28}\log(|T|+2)$。

(ii) $\sum_{|T-r_n|\geqslant 1} |T-r_n|^{-2} \leqslant 2c_{28}\log(|T|+2)$。

(iii)(a) 设 $T\geqslant 0$,则满足 $T\leqslant |r_n| \leqslant T+1$ 的零点个数 $\leqslant 4c_{28}\log(T+2)$;

(b) 设 $T\geqslant 2$,则满足 $|r_n| \leqslant T$ 的零点个数为 $O(T\log T)$。

(iv) 可找个 T',$T\leqslant T'\leqslant T+1$,使得 $|T'-r_n|\geqslant c_{29}(\log(T+2))^{-1}$ 对每个零点 $\rho_n=\beta_n+ir_n$ 都成立。

(v) 若 $z=\beta+it$, $-2\leqslant\beta\leqslant 3$, $|t|\geqslant\mu_1>0$,或 $0<\mu_2\leqslant|\beta|\leqslant\mu_3<2$,或 $\beta\geqslant 1$, μ_i 为常数,且 z 不与任一零点 ρ_n 相等, $z\neq 1$,则有

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\frac{1}{z-1}+\sum_{|t-r_n|<1}\frac{1}{z-\rho_n}+O(\log(|t|+2))。$$

读者可将这个定理的证明作为练习。

设 $T\geqslant 3$, χ 为模 q 的原特征, $q\geqslant 3$。我们用 $N(T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 的满足条件 $|t|\leqslant T$ 的非平凡零点 $s=\sigma+it$ 的数目,其中零点是几阶的就重复计数几次。基于我们已经证明的 L 函数零点分布的一些知识,我们可以用复分析的方法,获得 $N(T,\chi)$ 当 $T\to\infty$ 时的渐近公式,我们有

定理 1.5.12　设 $T\geqslant 3$, $q\geqslant 3$, q 为整数, χ 为模 q 的原特征, $N(T,\chi)$ 为 $L(s,\chi)$ 的满足条件 $|t|\leqslant T$ 的非平凡零点 $s=\sigma+it$ 的数目,其中零点是几阶的就重复计数几次。则

$$N(T,\chi)=\frac{T}{\pi}\log\frac{q}{\pi}+\frac{T}{\pi}\log T-T\left(\frac{\log 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)+O(\log(qT))。$$

证明: 由定理 1.5.10 的(iv)可知,可找到 T', $T\leqslant T'\leqslant T+1$,使得对于 $\xi(s,\chi)$ 的任一个零点 $\rho=\beta+ir$,都有

$$|T'-r|\geqslant\frac{c_{27}}{\log(q(T+2))}。$$

又由于 $\bar{\rho}=\beta-ir$ 为 $\xi(s,\bar{\chi})$ 的零点(见定理 1.5.10 的(iii)的(a)

证明中的说明),由定理 1.5.10 的(iv),可找到数 T'',$T \leqslant T'' \leqslant T+1$,使得

$$|-T''-r| = |T''-(-r)| = |T''+r| \geqslant \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))}。$$

设 $N(T',T'';\chi)$ 为 $L(s,\chi)$ 的满足 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $-T'' \leqslant t \leqslant T'$ 的非平凡零点 $\sigma+it$ 的个数(零点是几阶的就被计数几次),则由定理 1.5.10 的(iii) 的(a) 可得

$$N(T',T'';\chi) = N(T,\chi) + O(\log(qt))。\tag{23}$$

复 s 平面上的 4 点 A,B,C,D 定义为

$$A = \frac{5}{2} - iT'', B = \frac{5}{2} + iT', C = -\frac{3}{2} + iT', D = -\frac{3}{2} - iT'',$$

$\Delta = \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ 为以 δ_1、δ_2、δ_3 和 δ_4 为边的矩形,这里 δ_1 为连接点 A 与 B 的竖线,δ_2 为连接点 B 与 C 的横线,δ_3 为连接 C 与 D 的竖线,δ_4 为连接 D 与 A 的横线。由于亚纯函数 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 以函数 $L(s,\chi)$ 的零点为极点,所以它在包含闭矩形 δ 的一个稍大的小开矩形 Δ' 中是解析的,这个 Δ' 与 Δ 内部含有 $L(S,\chi)$ 同样的零点。因此,在 Δ' 内部,$L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 的全部极点是 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点与0(若 $\chi(-1)=1$) 或 -1(或 $\chi(-1)=-1$)。若 z 为 $L(s,\chi)$ 在 Δ' 内部的一个零点,则

$$L(s,\chi) = (s-z)^h F(s), h \geqslant 1, h \text{ 为整数},$$

其中 $F(z) \neq 0$, $F(s)$ 为整函数。于是,当 $0 < |s-z| < \lambda$,且 λ 充分地小时,s 属于 Δ' 的内部,$F(s) \neq 0$,并且这时

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{h(s-z)^{h-1} + (s-z)^h F'(s)}{L(s,\chi)} = \frac{h}{s-z} + \frac{F'(s)}{F(s)}。$$

由此局部分析看出,若 z 为 $L(s,\chi)$ 的 h 阶零点,z 属于 Δ 的内部,则 z 为 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 的 1 阶极点,且残数为 h。于是由残数定理可得(考虑到 $L(s,\chi)$ 可能以 0 或 -1 为零点,同时注意到,由

$\xi(0,\chi)\neq 0$、函数方程及 Γ 函数的性质,0 或 -1 仅能成为 $L(s,\chi)$ 的 1 阶零点,见 § 1.3 的练习(Ⅰ)与练习(Ⅱ)。)

$$\int_{\Delta}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\mathrm{d}s = 2\pi i(N(T',T'';\chi)+O(1)), \qquad (24)$$

这里 $\int_{\Delta}$ 表示 沿矩形 Δ 边界的积分。当 $s=5/2+it$ 时,由(1)可知

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{s}} = -\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)\chi(n)n^{-5/2}n^{-it},$$

$$\begin{aligned}\int_{\delta_1}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\mathrm{d}s &= -i\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{5/2}}\int_{-T}^{T}n^{-it}\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{n\geqslant 2}\Lambda(n)\chi(n)n^{-5/2}(\log n)^{-1}\\ &\quad\cdot(e^{-iT\log n}-e^{iT\log n}) = O(1),\end{aligned} \qquad (25)$$

这里 $\int_{\delta_1}$ 表示沿 直线段 δ_1 的积分。当 $s=\sigma+iT'$, $-3/2\leqslant\sigma\leqslant 5/2$ 时,由定理 1.5.10 的(v),我们有

$$\begin{aligned}\int_{\delta_2}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\mathrm{d}s &= \int_{\delta_2}\left(\sum_{|T'-\gamma_n|<1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log(qT))\right)\mathrm{d}s\\ &= \sum_{|T'-r_n|<1}\int_{\delta_2}\frac{\mathrm{d}s}{s-\rho_n}+O(\log(qT)),\end{aligned} \qquad (26)$$

其中 $\beta_n+ir_n=\rho_n$ 为$L(s,\chi)$ 的非平凡零点。由 T' 的选取,可知当 z 属于包含线段δ_2 的一个适当的小开矩形 Δ_1 时,$z-\rho_n$ 的虚部不为零,于是,设 $s_0=-3/2+iT'$,我们可以对任意的 $s\in\Delta_1$ 定义

$$g_n(s) = \int_{s_0}^{s}\frac{\mathrm{d}z}{z-\rho_n}-\log(s-\rho_n)+\log(s_0-\rho_n),$$

其中对数函数取主分支,积分是沿从 s_0 至 s 的直线段取的。容易验证,$g_n(s)$ 是 Δ_1 上的解析函数,且

$$g'_n(s)=0,g_n(s_0)=0。$$

由此可知 $g_n(s)$ 在 Δ_1 上恒等于零。特别地，当 $|T'-r_n|<1$ 时，这给出

$$\int_{\delta_2}\frac{dz}{z-\rho_n}=\log\left(\frac{5}{2}+iT'-\rho_n\right)-\log\left(-\frac{3}{2}+iT'-\rho_n\right)=O(1)。\tag{27}$$

由(26)、(27)及定理1.5.10(iii)的(a)，我们得

$$\int_{\delta_2}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds=O(\log(qT))。\tag{28}$$

类似地可得

$$\int_{\delta_4}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds=O(\log(qT))。\tag{29}$$

为计算展布在 δ_3 上的积分，由函数方程(定理1.3.5的(i))可得，当 $s\in\delta_3$ 时

$$L(s,\chi)=\frac{\tau(\chi)}{i^{\delta}q^{\frac{1}{2}}}L(1-s,\overline{\chi})(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}-s}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)\right)^{-1},$$

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\frac{L'(1-s,\overline{\chi})}{L(1-s,\overline{\chi})}-\log\left(\frac{q}{\pi}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)},$$

于是

$$\int_{\delta_3}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\int_{\delta_3}\frac{L'(1-s,\overline{\chi})}{L(1-s,\overline{\chi})}ds+i(T'+T'')\log(q\pi^{-1})$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\delta_3}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}\mathrm{d}s$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\delta_3}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}\mathrm{d}s。 \tag{30}$$

可与(25)类似地得到

$$\int_{\delta_3}\frac{L'(1-s,\overline{\chi})}{L(1-s,\overline{\chi})}\mathrm{d}s = O(1)。 \tag{31}$$

当 $s\in\delta_3$ 时，$s=-3/2+it,\ -T''\leqslant t\leqslant T'$，所以由定理1.1.5的(v)可得

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}=\frac{\Gamma'\left(\frac{5}{4}+\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}it\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}it\right)}$$

$$=\log\left(\frac{9}{4}+\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}it\right)+O\left(\frac{1}{|t|+1}\right),$$

因此

$$\int_{\delta_3}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}\mathrm{d}s$$

$$=-i\int_{-T''}^{T'}g(t)\mathrm{d}t+O(\log T), \tag{32}$$

这里 $g(t)=\log\left(\frac{9}{4}+\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}it\right)$，对数值是用主分支定义的。$g(t)$ 是区间 $I=(-2T'',2T')$ 上的可导函数。若设 $g(t)=u(t)+iv(t)$，$u(t)$ 及 $v(t)$ 为实值函数，则易知 $u(t)$ 与 $v(t)$ 也为 I 上可导函数。由实函数的分部积分及(27)中计算复积分的方法，可得

$$\begin{aligned}\int_{-T''}^{T'} g(t)\mathrm{d}t &= \int_{-T''}^{T'} u(t)\mathrm{d}t + i\int_{-T''}^{T'} v(t)\mathrm{d}t \\ &= tu(t)\Big|_{-T''}^{T'} - \int_{-T''}^{T'} tu'(t)\mathrm{d}t + itv(t)\Big|_{-T''}^{T'} \\ &\quad - i\int_{-T''}^{T'} tv'(t)\mathrm{d}t \\ &= tg(t)\Big|_{-T''}^{T'} - \int_{-T''}^{T'} t\cdot g'(t)\mathrm{d}t \\ &= T'g(T') + T''g(-T'') \\ &\quad - \int_{-T''}^{T'}\left(1 - \frac{9/4+\delta/2}{9/4+\delta/2-1/2it}\right)\mathrm{d}t \\ &= g(T')\left(T' - \frac{9}{2}i - \delta i\right) + g(-T'')\left(T''\right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2}i + \delta i\right) - T' - T''。\end{aligned} \tag{33}$$

我们有

$$g(T') = \log\left[\left(\frac{9}{4}+\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{T'}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + i\theta_1,\ -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < 0,$$

其中

$$\sin\theta_1 = \frac{-\dfrac{T'}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{T'}{2}\right)^2}} = -1 + O(T^{-2})。$$

所以

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right) = 1 + O(T^{-2}),$$

$$\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)\right] = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)\right)} = O(T^{-1}),$$

并由当 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时成立的不等式 $1 \leqslant \frac{\theta}{\sin\theta} \leqslant \frac{\pi}{2}$ 可得

$$\theta_1 + \frac{\pi}{2} = O(T^{-1})。$$

于是,由 $T \leqslant T' \leqslant T+1$ 可知

$$g(T') = \log\left(\frac{T'}{2}\right) - \frac{\pi}{2}i + O(T^{-1}) = \log\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{\pi}{2}i + O(T^{-1});$$

类似地,由 $T \leqslant T'' \leqslant T+1$ 可得

$$g(-T'') = \log\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{\pi}{2}i + O(T^{-1})。$$

所以由(33)我们有

$$\begin{aligned}\int_{-T''}^{T'} g(t)\mathrm{d}t &= (T' + T'')\left(\log\frac{T}{2}\right) + \frac{\pi}{2}i(-T' + T'') \\ &\quad - T' - T'' + O(\log T) \\ &= 2T\log\frac{T}{2} - 2T + O(\log T)。\end{aligned} \tag{34}$$

由(32)及(34)可得

$$\int_{\delta_3} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}\mathrm{d}s = -2iT\log\left(\frac{T}{2}\right) + 2iT + O(\log T)。 \tag{35}$$

类似地,当 $t \in (-2T'', 2T')$ 时令

$$G(t) = \log\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{it}{2}\right),$$

这里对数取主分支,则由引理 1.1.5 的(v)及分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_{\delta_3} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}\mathrm{d}s &= -i\int_{-T''}^{T'} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}+it+\delta\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}+it+\delta\right)\right)}\mathrm{d}t \\ &= -i\int_{-T''}^{T'} G(t)\mathrm{d}t + O(\log T) \\ &= -2iT\log\left(\frac{T}{2}\right) + 2iT + O(\log T)。\end{aligned} \tag{36}$$

由(20)~(22),(28)~(31),(35)及(36),可知定理 1.5.15 成立。**证毕**。

对于 ζ 函数,若设 $T \geqslant 3$,并用 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = \beta + it$ 且 $|t| \leqslant T$ 的非平凡零点 ρ 的个数,则与定理 1.5.12 类似地,我们也可以获得 $N(T)$ 当 $T \to \infty$ 时的渐近公式。

本节最后的目的是证明下列命题:

定理 1.5.13 设 $q \geqslant 3$, $\chi(n)$ 是模 q 的一个实原特征,则存在一个可计算的绝对常数 $c > 0$,使得若 σ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡实零点,则

$$1 - \sigma > cq^{-1/2}(\log q)^{-4}。$$

为证明本结果,我们先证明若干引理。

引理 1.5.14 设 s 为一复数, $\mathrm{Re}s > 0$, $\chi(n)$ 为模 q 的特征, $q \geqslant 3$,则对任一实数 $a > 1$,

$$L'(s, \chi) = -\sum_{n \leqslant a} \frac{\chi(n)\log n}{n^s}$$
$$-\int_a^{\infty}\Big(\sum_{a < n \leqslant y} \chi(n)\Big) y^{-s-1}(1 + s\log y)\mathrm{d}y。$$

证明: 当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时,设 $b > a > 1$。由引理 1.1.3 可得

$$-\sum_{a < n \leqslant b} \frac{\chi(n)\log n}{n^s} = -\int_a^b\Big(\sum_{a < n \leqslant y} \chi(n)\Big) y^{-s-1}(1 + s\log y)\mathrm{d}y$$
$$-b^{-s}\log b\Big(\sum_{a < n \leqslant b} \chi(n)\Big)。\tag{37}$$

应用定理 1.2.2(iii),不难看出估计

$$\Big|\sum_{a < n \leqslant b} \chi(n)\Big| \leqslant \varphi(q)$$

总成立。因此,在(37) 两边令 $b \to +\infty$,可得

$$L'(s, \chi) + \sum_{n \leqslant a} \frac{\chi(n)\log n}{n^s}$$
$$= -\int_a^{\infty}\Big(\sum_{a < n \leqslant y} \chi(n)\Big) y^{-s-1}(1 + s\log y)\mathrm{d}y。\tag{38}$$

注意:(38) 的左边当 $\mathrm{Re}s > 0$ 时是解析的,而我们又可与引理

1.1.1 的证明中类似地证明(38) 的右边当 $\mathrm{Re}s > 0$ 时也为 s 的解析函数。故由解析开拓原理,可知(38) 在 $\mathrm{Re}s > 0$ 时也成立。**证毕**。

引理 1.5.15　设 $q \geqslant 3, \chi(n)$ 为模 q 的原特征,$\sigma \in \left[1 - \dfrac{1}{2\log q}, 1\right]$,则 $|L'(\sigma,\chi)| \leqslant 51(\log q)^2$。

证明:由引理 1.5.14,并应用定理 1.2.4,可知

$$|L'(\sigma,\chi)| \leqslant \sum_{n \leqslant q} \frac{\log n}{n^{\sigma}} + \int_q^{\infty} (4q^{1/2}\log q) y^{-\sigma-1}(1 + \log y) \mathrm{d}y。\tag{39}$$

显然

$$\sum_{n \leqslant q} \frac{\log n}{n^{\sigma}} \leqslant (\log q)\left(1 + \int_1^q u^{-\sigma} \mathrm{d}u\right) = (\log q)\left(1 + \frac{q^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}\right) \leqslant 3(\log q)^2,$$

$$\int_q^{\infty} y^{-\sigma-1}(1 + \log y) \mathrm{d}y \leqslant 2\int_q^{\infty} y^{-\sigma-1} \log y \mathrm{d}y = \frac{2}{\sigma}(\log q + \sigma^{-1}) q^{-\sigma} \leqslant 12 q^{-1} \log q;$$

在推导中用到

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{2\log q} \geqslant 1 - \frac{1}{2\log 3} \geqslant \frac{1}{2}。$$

因此,由(39) 可知

$$|L'(\sigma,\chi)| \leqslant 3(\log q)^2 + 48 q^{-1/2} (\log q)^2 \leqslant 51(\log q)^2。$$

证毕。

引理 1.5.16　设 $0 < \alpha < 1$,则

$$\int_0^{\infty} \alpha^{u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(\log \frac{1}{\alpha}\right)^{-1/2}。$$

证明:由于 $\alpha = \exp(-\log\frac{1}{\alpha})$,我们有

$$\int_0^\infty \alpha^{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{-\beta u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_0^\infty e^{-v^2}\mathrm{d}v; \tag{40}$$

其中 $\beta = \log\frac{1}{\alpha} > 0$,而且已做了变量替换 $\sqrt{\beta}u = v$。由于

$$\left(\int_0^\infty e^{-v^2}\mathrm{d}v\right)^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在其中令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, r > 0$,则有

$$\left(\int_0^\infty e^{-v^2}\mathrm{d}v\right)^2 = \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}。$$

所以由(40)可知本引理成立。**证毕**。

引理 1.5.17 设 $q \geqslant 3$,$\chi(n)$ 为模 q 的实原特征,则存在一个可以计算的正的常数 λ,使得

$$L(1,\chi) \geqslant \lambda q^{-1/2}(\log q)^{-2}。$$

证明:设 $t \in (0,1)$,t 为一个待选参数。令

$$H(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n t^n, a_n = \sum_{d\mid n}\chi(d),$$

$$G(t) = H(t) - \frac{L(1,\chi)}{1-t}。$$

一方面,由于若 $n = p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$,则

$$a_n = \prod_{1\leqslant i\leqslant k}(1 + \chi(p_1) + \cdots + (\chi(p_i))^{r_i}),$$

因此,对于 $m \geqslant 1, a_{m^2} \geqslant 1$,

$$H(t) \geqslant \sum_{m\geqslant 1} t^{m^2} \geqslant \int_1^\infty t^{u^2}\mathrm{d}u \geqslant \int_0^\infty t^{u^2}\mathrm{d}u - 1$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\log\frac{1}{t})^{-1/2} - 1; \tag{41}$$

最后一步应用了引理 1.5.16。另一方面,由于

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d\mid n}\chi(d)\Big)t^n=\sum_{d=1}^{\infty}\chi(d)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}t^{dm}\Big)$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\chi(d)\cdot\frac{t^d}{1-t^d},$$

若令

$$S_n=\sum_{m\geqslant n}\frac{\chi(m)}{m},\ T_r=\sum_{m\leqslant r}\chi(m),$$

$$P_d(t)=\frac{1}{1-t^d}-\frac{1}{d(1-t)},$$

则有(用到定理 1.2.4)

$$\begin{aligned}
G(t)&=\sum_{d=1}^{\infty}\chi(d)\frac{t^d}{1-t^d}-\frac{L(1,\chi)}{1-t}\\
&=\sum_{d=1}^{\infty}\chi(d)\Big(\frac{t^d}{1-t^d}-\frac{t^d}{d(1-t)}\Big)\\
&\quad+\sum_{d=1}^{\infty}(S_d-S_{d+1})\frac{t^d}{1-t}-\frac{L(1,\chi)}{1-t}\\
&=\sum_{d=1}^{\infty}\chi(d)\Big(\frac{t^d}{1-t^d}-\frac{t^d}{d(1-t)}\Big)+\sum_{d=1}^{\infty}S_d\frac{t^d}{1-t}\\
&\quad-\sum_{d\geqslant2}S_d\cdot\frac{t^{d-1}}{1-t}-\frac{S_1}{1-t}\\
&=\sum_{d\geqslant1}\chi(d)t^d\Big(\frac{1}{1-t^d}-\frac{1}{d(1-t)}\Big)-\sum_{d\geqslant1}S_dt^{d-1}\\
&=\sum_{d\geqslant1}(T_d-T_{d-1})P_d(t)-\sum_{d\geqslant1}\Big(\sum_{m\geqslant d}\frac{T_m-T_{m-1}}{m}\Big)t^{d-1}\\
&=\sum_{d\geqslant1}T_dP_d(t)-\sum_{d\geqslant1}T_dP_{d+1}(t)\\
&\quad-\sum_{d\geqslant2}\Big(\sum_{m\geqslant d}\frac{T_m}{m}-\sum_{m\geqslant d-1}\frac{T_m}{m+1}\Big)t^{d-1}-L(1,\chi)\\
&=\sum_{d\geqslant1}T_d(P_d(t)-P_{d+1}(t))-\sum_{d\geqslant2}\Big(\sum_{m\geqslant d}\frac{T_m}{m(m+1)}\Big)t^{d-1}\\
&\quad-\sum_{d\geqslant2}\frac{T_d}{d+1}t^{d-1}-L(1,\chi)
\end{aligned}$$

$$\leqslant (2q^{1/2}\log q)\Big(\sum_{d\geqslant 1} |P_d(t) - P_{d+1}(t)| + 2\sum_{d\geqslant 2}\frac{t^{d-1}}{d}\Big)。\quad (42)$$

由于

$$\sum_{d\geqslant 2}\frac{t^{d-1}}{d} \leqslant \sum_{d\geqslant 1}\frac{t^d}{d} = -\log(1-t),$$

$$\sum_{d\geqslant 1}|P_d(t) - P_{d+1}(t)| \leqslant \sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{1-t}\Big(|F_d(t)| + \frac{(1-t)}{d+1}t^d\Big)$$

$$\leqslant \sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{1-t}|F_d(t)| - \log(1-t),$$

$$\sum_{d\geqslant 1}|F_d(t)| = \sum_{d\geqslant 1}\left|\frac{t^d}{1+t+\cdots+t^{d-1}} - \frac{t^{d+1}}{1+t+\cdots+t^d} - \frac{t^d}{d(d+1)}\right|$$

$$= \sum_{d\geqslant 1}\left(\frac{t^d}{1+t+\cdots+t^{d-1}} - \frac{t^{d+1}}{1+t+\cdots+t^d} - \frac{t^d}{d(d+1)}\right)$$

$$= t - \sum_{d\geqslant 1}\frac{t^d}{d(d+1)} = t - 1 - \frac{1-t}{t}\log(1-t),$$

因此

$$G(t) \leqslant \left(\frac{1}{1-t}\Big(t - 1 - \frac{1-t}{t}\log(1-t)\Big) - 3\log(1-t)\right)(2q^{\frac{1}{2}}\log q)$$

$$\leqslant (2q^{\frac{1}{2}}\log q)\left(\Big(\frac{1}{t}+3\Big)\log\Big(\frac{1}{1-t}\Big)\right)。\quad (43)$$

设$\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant 1$,并令

$$f(t) = 4(1-t) + \log t。$$

则由 $f(1) = 0$ 以及当$\frac{1}{4} < t < 1$ 时成立的显然不等式 $f'(t) = -4 + \frac{1}{t} < 0$,可知 $f(t) \geqslant 0$ 当$\frac{1}{4} \leqslant t < 1$ 时总成立,故此时有

$$\frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{t}}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{1-t}}。\quad (44)$$

由(41),(43) 及(44),可知当 $t \in (\frac{1}{4}, 1)$ 时必有

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t} = H(t) - G(t) > \frac{1}{4\sqrt{1-t}} - 1$$

$$- 14q^{1/2}(\log q)\log\left(\frac{1}{1-t}\right)。\qquad (45)$$

令 $t = 1 - cq^{-1}(\log q)^{-4}$,则当 c 充分小时,由(45)必可得(注意:对任一常数 $D > 0$,当 c 充分小时,必有 $c^{-1/2} > D\log(1/c)$)

$$L(1,\chi) > 0.2(1-t)^{1/2} = 0.2c^{1/2}q^{-1/2}(\log q)^{-2}。$$

证毕。

定理 1.5.13 的证明:由 $L(\sigma,\chi) = 0$,并用中值定理,得

$$L(1,\chi) = L(1,\chi) - L(\sigma,\chi) = (1-\sigma)L'(\xi,\chi), \qquad (46)$$

其中 $\xi \in (\sigma,1)$。如果

$$\sigma < 1 - \frac{1}{2\log q},$$

则显然有

$$1 - \sigma > \frac{1}{2\log q} \geqslant \frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}(\log q)^4}。$$

设 $1 > \sigma \geqslant 1 - (2\log q)^{-1}$,则应用引理 1.5.15 与引理 1.5.17,由(46)可知所需结论仍成立。**证毕**。

练　　习

(Ⅰ)用证明定理 1.5.10 的类似方法,证明定理 1.5.11。

(Ⅱ)设 $T \geqslant 3$,用 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = \beta + it, |t| \leqslant T$ 的非平凡零点 ρ 的个数。用定理 1.5.12 的证明方法和定理 1.5.11,证明

$$N(T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{\pi} - T\left(\frac{\log 2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right) + O(\log T)。$$

§1.6 算术级数中的素数

设 q 为给定的正整数，$q \geqslant 3$，正整数 a 与 q 互素，x 为充分大实数，我们用 $\pi(x;q,a)$ 表示算术级数 $a+kq(k \geqslant 0)$ 中不超过 x 的素数个数，即

$$\pi(x;q,a)=\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a(\bmod q)}} 1。$$

设

$$\psi(y;q,a)=\sum_{\substack{n \equiv a(\bmod q) \\ n \leqslant y}} \Lambda(n), y \geqslant 2,$$

其中 $\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数，即当 $n=p^m, m \geqslant 1, p$ 为素数时 $\Lambda(n)=\log p$，否则 $\Lambda(n)=0$。则

$$\begin{aligned}
\pi(x;q,a) &= \sum_{2 \leqslant n \leqslant x}(\psi(n;q,a)-\psi(n-1;q,a)) \frac{1}{\log n} \\
&\quad + O\Big(\sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ m \geqslant 2}} \frac{1}{m}\Big)=\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{\psi(n;q,a)}{\log n} \\
&\quad - \sum_{2 \leqslant n \leqslant x-1} \frac{\psi(n;q,a)}{\log(n+1)}+O(x^{1/2} \log x) \\
&= \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \psi(n;q,a)\Big(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\Big) \\
&\quad + \frac{\psi([x];q,a)}{\log([x]+1)}+O(x^{1/2} \log x)。 \qquad (1)
\end{aligned}$$

因此，我们可通过研究 $\psi(y;q,a)$ 的渐近性状，来研究 $\pi(x;q,a)$ 的渐近性状。由定理 1.2.2 的(ii)，我们有

$$\begin{aligned}
\psi(y;q,a) &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{n \leqslant y} \Lambda(n)\Big(\sum_{\chi} \chi(n) \bar{\chi}(a)\Big) \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \psi(y, \chi_0)+\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \psi(y, \chi), \qquad (2)
\end{aligned}$$

其中$\sum\limits_{\chi}$ 表示 χ 取模 q 所有特征，χ_0 为模 q 主特征，而

$$\psi(y,\chi) = \sum_{n\leqslant y}\chi(n)\Lambda(n)。$$

显然，我们有

$$\psi(y,\chi_0) = \sum_{n\leqslant y}\Lambda(n) + O((\log y)^2)。$$

若设 χ 为模 q 的非主特征，由定理 1.2.2 的(v)，可知存在模 q_1 的原特征 $\chi_1, q_1 \mid q, 3 \leqslant q_1 \leqslant q$，$\chi$ 由模 q_1 的原特征 χ_1 诱导出，即当 $(n,q) = 1$ 时，$\chi(n) = \chi_1(n)\chi_0(n)$。显见有

$$\begin{aligned}\psi(y,\chi) &= \sum_{n\leqslant y}\chi_1(n)\Lambda(n) + O\Big(\sum_{\substack{n\leqslant y\\(n,q)>1\\(n,q_1)=1}}\Lambda(n)\Big)\\ &= \psi(y,\chi_1) + O(\log y\cdot\log q)。\end{aligned} \tag{3}$$

因此，我们需要研究当 χ_1 为模 q_1 原特征时的 $\psi(y,\chi_1)$ 及 $\sum\limits_{n\leqslant y}\Lambda(n)$。用 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 表示若干正的绝对常数，我们将证明

定理 1.6.1 (i) 设 χ 为模 q 的原特征，$3\leqslant q\leqslant Q, x\geqslant 9$，则

$$\psi(x,\chi) = -\theta\frac{x^{\tilde\beta}}{\tilde\beta} - \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T}{}' \frac{x^\rho}{\rho} + O\Big(\frac{x}{T}(\log(Qx))^2\Big),$$

其中 $3\leqslant T\leqslant\sqrt{x}$，$\theta = 1$ 或 0 视是否存在 Q - 例外零点 $\tilde\beta$（定义见定理 1.5.2）而定，对 ρ 的求和通过 $L(s,\chi)$ 的满足 $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T$ 的非平凡零点 ρ，且 $\rho\neq\tilde\beta$ 及 $1-\tilde\beta$（若 $\tilde\beta$ 存在）。

(ii) $\psi(x) = \sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n) = x - \sum\limits_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T}\frac{1}{\rho}x^\rho + O\Big(\frac{x}{T}(\log x)^2\Big)$，

其中 $3\leqslant T\leqslant\sqrt{x}$，求和通过一切满足 $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant T$ 的 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。

(iii) $\psi(x) = \sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n) = x + O(x\exp(-\lambda_1\sqrt{\log x}))$。

(iv) $\pi(x) = \sum\limits_{p\leqslant x}1 = \int_2^x\frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O(x\exp(-\lambda_2\sqrt{\log x}))$。

(v) 设 δ 为一正数,$\delta < 1/2$,则当 $x \geqslant x_0(\delta) > 0$ 及 $3 \leqslant q \leqslant (\log x)^{2-3\delta}$ 时,

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x \cdot \exp(-c_1(\delta)(\log x)^{\delta})),$$

其中 $x_0(\delta)$ 及 $c_1(\delta)$ 为两个仅与 δ 有关的正的常数。

(vi) 对 δ, x 与 q 的假设同(v),则

$$\pi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O\left(x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}c_1(\delta)(\log x)^{\delta}\right)\right)。$$

为证该结果,除前几节的预备知识外,我们还需先证两个引理。

引理 1.6.2 设 $T \geqslant 3, a \neq 1, a > 0, b > 0$。若 $a > 1$,则 $\Delta(a) = 1$,否则 $\Delta(a) = 0$。则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{a^s}{s}\mathrm{d}s = \Delta(a) + O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right),$$

其中 L 为复 s 平面上从点 $b - iT$ 到点 $b + iT$ 的竖直线段。

证明:若 $a > 1$,设 $U \geqslant 3$。由残数定理可得

$$\int_L \frac{a^s}{s}\mathrm{d}s = 2\pi i + I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 I_1 为沿从 $-U + iT$ 至 $b + iT$ 连线的积分,I_2 为沿从 $-U - iT$ 至 $-U + iT$ 的连线的积分,I_3 为沿着从 $b - iT$ 至 $-U - iT$ 连线的积分,被积函数均为 a^s/s。我们有

$$|I_1| = |I_3| = O\left(\int_{-U}^b \frac{a^{\sigma}}{T}\mathrm{d}\sigma\right) = O\left(\frac{1}{T\log a}(a^b - a^{-U})\right),$$

$$|I_2| = O\left(\int_{-T}^T \frac{a^{-U}}{U}\mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{Ta^{-U}}{U}\right)。$$

因此,令 $U \to \infty$,可得所需结果。在 $0 < a < 1$ 时,仅需将由 $b + iT$、$b - iT$、$-U - iT$、$-U + iT$ 所确定的矩形换成由 $b + iT$、$U + iT$、$U - iT$ 和 $b - iT$ 所确定的矩形,并运用残数定理作类似的讨论。**证毕**。

引理 1.6.3　当 $x \geqslant 0$ 时，$\log(1+x) \geqslant \frac{x}{x+1}$。

证明：令 $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}, x \geqslant 0$。则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0,$$

故 $f(x)$ 为单调增函数。由 $f(0) = 0$ 可得 $f(x) \geqslant 0$。**证毕**。

定理 1.6.1 的证明：(i) 的证明。由定理 1.5.10 的(iv)，与定理 1.5.12 的证明的开头类似地，可找到属于区间 $[T, T+1]$ 的数 T' 及 T''，使得

$$|T' - r_n| \geqslant \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))},$$

$$|T'' + r_n| \geqslant \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))},$$

对 $L(s,\chi)$ 的所有非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 成立。我们有

$$\psi(x,\chi) = \psi(Y,\chi) + O(\log x), \tag{4}$$

其中 $Y = [x] + \frac{1}{2}$。设 $\sigma > 1$。由引理 1.6.2，对充分大正整数 N，$N > Y$，我们有

$$\begin{aligned}\psi(Y,\chi) &= \sum_{n \leqslant Y} \chi(n)\Lambda(n) = \sum_{n \leqslant N} \chi(n)\Lambda(n)\Delta\left(\frac{Y}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - iT'}^{\sigma + iT'} \frac{Y^s}{s}\left(\sum_{n \leqslant N} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s}\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T}Y^{\sigma}\left(\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{\log n}{n^{\sigma}\left|\log\frac{Y}{n}\right|}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - iT''}^{\sigma + iT'} \frac{Y^s}{s}\left(\sum_{n \leqslant N} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s}\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + O\left(\frac{Y^{\sigma}}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}}\right) + O\left(\frac{Y^{\sigma}}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}\left|\log\frac{Y}{n}\right|}\right)。\end{aligned}$$

由 §1.4 的(i) 我们有

$$\sum_{n\leqslant N}\chi(n)\Lambda(n)n^{-s}=-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}+O\Big(\sum_{n>N}\frac{\log n}{n^\sigma}\Big)。$$

由求导可知函数$(\log t)t^{-\sigma}$当$t>N>e$时为下降函数,所以

$$\sum_{n>N}\frac{\log n}{n^\sigma}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma}\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\log t}{t^\sigma}\mathrm{d}t=\int_N^\infty\frac{\log t}{t^\sigma}\mathrm{d}t$$

$$\ll\frac{1}{\sigma-1}N^{1-\sigma}\log N+\frac{N^{1-\sigma}}{(1-\sigma)^2}。\qquad(5)$$

现取$\sigma=1+1/\log Y$,则得(应用当$N=4$时的(5)式可得$\sum\limits_{n\geq1}(\log n)n^{-\sigma}=O((\log Y)^2)$)

$$\psi(Y,\chi)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT''}^{\sigma+iT'}\frac{Y^s}{s}\cdot\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\mathrm{d}s+O(TYN^{1-\sigma}(\log Y)^2\log N)$$

$$+O\Big(\frac{Y}{T}(\log Y)^2\Big)+O\left(\frac{1}{T}Y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma\left|\log\frac{Y}{n}\right|}\right)。$$

令$N\to\infty$,则有

$$\psi(Y,\chi)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT''}^{\sigma+iT'}\frac{Y^s}{s}\cdot\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\mathrm{d}s$$

$$+O\left(\frac{Y}{T}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma\left|\log\frac{Y}{n}\right|}\right)。\qquad(6)$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma\left|\log\frac{Y}{n}\right|}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3,$$

其中$\sum_1$、$\sum_2$与$\sum_3$分别是无穷级数的满足$n>2Y,n<Y/2$与$Y/2\leqslant n\leqslant 2Y$的部分。应用(5),显然可得

$$\sum\nolimits_1\ll\sum_{n>2Y}\frac{\log n}{n^\sigma}\ll(\log Y)^2。$$

又,由$\sum\limits_{n<Y}n^{-1}\ll\log Y$(见定理 1.3.6 的证明)可得

$$\sum_2 \ll \sum_{n<Y} \frac{\log n}{n^\sigma} \ll \log Y \cdot \sum_{n\leqslant Y} \frac{1}{n} \ll (\log Y)^2。$$

对于$\sum_3$,我们看到

$$\sum_3 \ll \frac{\log Y}{Y}\Big(\sum_{\frac{Y}{2}\leqslant n<Y} \frac{1}{\log \frac{Y}{n}} + \sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{1}{\log \frac{n}{Y}} \Big)。$$

由引理 1.6.3 可知,当$\frac{Y}{2} \leqslant n < Y$时

$$\log \frac{Y}{n} = \log\left(1 + \frac{Y-n}{n}\right) \geqslant \frac{Y-n}{Y},$$

所以

$$\sum_{\frac{1}{2}Y\leqslant n<Y} \frac{1}{\log \frac{Y}{n}} \leqslant Y \sum_{\frac{1}{2}Y\leqslant n<Y} \frac{1}{Y-n} \leqslant 2Y \sum_{1\leqslant m\leqslant Y} \frac{1}{m} \ll Y\log Y。$$

类似地,可得

$$\sum_{Y<n\leqslant 2Y} \frac{1}{\log \frac{n}{Y}} \ll Y\log Y。$$

所以,$\sum_3 \ll (\log Y)^2$。又由于$\sum_1$与$\sum_2$的估计,就得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma \left|\log \frac{Y}{n}\right|} \ll (\log Y)^2。$$

因此,(4) 及(6) 得

$$\psi(x,\chi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT''}^{\sigma+iT'} F(s)\mathrm{d}s + O\left(\frac{Y}{T}(\log Y)^2\right), \qquad (7)$$

其中 $F(s) = \frac{Y^s}{s} \cdot \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$。在定理 1.5.12 的证明中,我们已分析过,在 $L(s,\chi)$ 的一个 h 阶零点 z 附近($s \neq z$)

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{h}{s-z} + g(s),$$

而 $g(s)$ 在 $s = z$ 处解析。因此,若在 $\chi(-1) = 1$ 时令 $\delta = 0$,在

$\chi(-1)=-1$ 时令 $\delta=1$，则函数 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 的极点为 $L(s,\chi)$ 的所有平凡零点 $-\delta-2n$（n 为非负整数）和所有非平凡零点 $z_m(m=1,2,\cdots)$，且都是单阶极点。在复 s 平面上，令 $A=\sigma-iT''$，$B=\sigma+iT'$，$C=-1/2+iT'$，$D=-1/2-iT''$，并用 $\overline{AB}$ 表示由 A 至 B 的直线段，并以此类推。显然，$F(s)$ 在以 A,B,C,D 为顶点的矩形区域内部 E（E 为开集）为亚纯函数，且具有极点 0 以及有限个 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点 z_m。因此，由残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{AB}}F(s)\mathrm{d}s=a_0+\sum_{z_m\in E}a_{z_m}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{BC}}F(s)\mathrm{d}s$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{CD}}F(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{DA}}F(s)\mathrm{d}s,\tag{8}$$

其中 a_0 和 a_{z_m} 分别表示 $F(s)$ 在 $s=0$ 处和 $s=z_m$ 处的残数。由定理 1.5.10 的(iii)、(v) 以及 T' 的选取，可知当 $s\in\overline{BC}$ 时，

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=O((\log(qT))^2),$$

所以

$$\int_{\overline{BC}}F(s)\mathrm{d}s=O\left(\frac{x}{T}(\log(qT))^2\right)。\tag{9}$$

同理可得

$$\int_{\overline{DA}}F(s)\mathrm{d}s=O\left(\frac{X}{T}(\log(qT))^2\right)。\tag{10}$$

当 $s=\beta+iT\in\overline{CD}$ 时，由定理 1.5.10 的(v)，我们有

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=O\Big(\sum_{|t-r_n|<1}1\Big)+O(\log(q(|t|+2)))=O(\log(qT)),$$

所以

$$\int_{\overline{CD}}F(s)\mathrm{d}s=O\left(x^{-1/2}\left(\int_{-T''}^{T'}\frac{1}{|t|+1}\mathrm{d}t\right)\log(qT)\right)$$
$$=O(x^{-1/2}(\log(qT))^2)。\tag{11}$$

为计算 a_0，设 $s\neq\rho_n$，$s\neq-\delta-2n$（$n\geqslant0$，n 为整数），这里 δ 与

定理 1.3.5 的(i) 中同样地定义,即当 $\chi(-1)=1$ 时,$\delta=0$,而当 $\chi(-1)=-1$ 时,$\delta=1$。由推论 1.4.7(应用两次,并相减) 可得

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{L'(2,\chi)}{L(2,\chi)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2-z_n}-\frac{1}{s-z_n}\right)。\quad(12)$$

当 $\delta=0$ 时,0 为 $F(s)$ 的 2 阶零点。由定理 1.1.5 的(v) 可知,当 $s\neq 0$ 且 s 不位于负实轴上时,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=\log(s+1)-\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{s}+2\int_1^{\infty}\frac{\sigma(x)\mathrm{d}x}{(s+x)^3}。\quad(13)$$

但是不难看出,(13) 式两边的函数在复 s 平面的开连通集

$$\Omega=\left\{s\,|\,0<|s|<\min\left(\frac{|z_1|}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

中都为解析函数(对于 Γ'/Γ,可应用定理 1.1.5 的(i)、(ii) 及 (iii),而对于(13) 式右端的积分,则可应用引理 1.1.1 的(ii) 的类似证法证明它在集合$\{s\,|\,|s|<\frac{1}{2}\}$内解析)。因此,由解析开拓可知(13) 式在 Ω 上成立。由(12) 式与(13) 式可得,当 $s\in\Omega$ 时

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{1}{s}+g(s),\quad(14)$$

$$g(s)=\frac{L'(2,\chi)}{L(2,\chi)}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{s}{2}+1\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$-\int_1^{\infty}\frac{\sigma(x)\mathrm{d}x}{(s+x)^3}-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2-z_n}-\frac{1}{s-z_n}\right)。\quad(15)$$

应用引理 1.4.3,可知(15) 式右边的无穷级数在 $s=0$ 处解析,因此 g/s 在$\{s\,|\,|s|<\min(\frac{1}{2}|z_1|,\frac{1}{2})\}$中的解析。由定义及(14) 与

(15),我们得

$$a_0 = \lim_{s\to0}(F(s)s^2)' = \lim_{s\to0}\left(Y^s\cdot s\cdot\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)'_s$$

$$= \lim_{s\to0}\left(Y^s\cdot s\cdot\left(\frac{1}{s}+g(s)\right)\right)'_s = \lim_{s\to0}(Y^s(1+sg(s)))'_s$$

$$= \lim_{s\to0}(Y^s\log Y(1+sg(s))+Y^s(g(s)+sg'(s)))$$

$$= \log Y + g(0) = \sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{z_n-2}-\frac{1}{z_n}\right)+O(\log x)。\quad(16)$$

当 $\delta = 1$ 时,0 为 $F(s)$ 的 1 阶零点。由此由(12)式可得

$$a_0 = \lim_{s\to0} sF(s) = \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} = \sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{z_n-2}-\frac{1}{z_n}\right)+O(1)。\quad(17)$$

由(16)及(18),我们总有

$$a_0 = \sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{z_n-2}-\frac{1}{z_n}\right)+O(\log x)。\quad(18)$$

若设 $z_n = \beta_n + ir_n$,则由定理 1.5.10 的(i)可得

$$\sum_{\substack{n\geq1\\|r_n|\geq1}}|z_n(z_n-2)|^{-1} \leqslant \sum_{|r_n|\geq1} r_n^{-2} \leqslant \sum_{n\geq1}\frac{2}{1+r_n^2} \ll \log q。\quad(19)$$

由推论 1.4.7 的证明过程可知,若 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 为 $L(s,\chi)$ 的所有非平凡零点按绝对值上升的顺序的一个排列,则 $1-\bar{z}_1,1-\bar{z}_2,\cdots,1-\bar{z}_n,\cdots$ 为 $L(s,\chi)$ 的所有非平凡零点的一个排列。因此,若 $z_n = \beta_n + ir_n$ 为 $L(s,\chi)$ 的一个非平凡零点,$|r_n| < 1$,且使得 $1-\bar{z}_n$ 不为 Q - 例外零点(无论其存在与否;定义见定理 1.5.2),则有

$$\beta_n = 1 - \mathrm{Re}(1-\bar{z}_n) > \frac{c_2}{\log(3Q)}。$$

由此,应用定理 1.5.10 的(iii)的(b),可得

$$\sum_{|r_n|<1}{}'|z_n(z_n-2)|^{-1} \ll \sum_{|r_n|<1}{}'|z_n|^{-1} \ll \sum_{|r_n|<1}{}'\beta_n^{-1}$$

$$\ll (\log Q)^2, \tag{20}$$

这里′表示 $1 - \bar{z}_n$ 不为 Q - 例外零点。若 Q - 例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在，则由定理 1.5.2 可知

$$1 - \tilde{\beta} \leqslant \frac{c_2}{\log(2Q)} < \frac{1}{2}, \tag{21}$$

所以 $\tilde{\beta} > \frac{1}{2} > 1 - \tilde{\beta}$，因此 $\tilde{\beta}$ 已经包含在(20)式左边的求和中。由(18)、(19)及(20)，我们有

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta\left(-\frac{1}{\tilde{\beta}+1} - \frac{1}{1-\tilde{\beta}}\right) + O(\log x) + O((\log Q)^2) \\ &= -\frac{\theta}{1-\tilde{\beta}} + O((\log x)^2)。 \end{aligned} \tag{22}$$

在定理 1.5.12 的证明中，我们已指出：若 z 为 $L(s,\chi)$ 的位于以 A,B,C,D 为顶点的矩形内的一个 h 阶零点，则 z 为函数 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ 的 1 阶极点，残数为 h。由此易得

$$\begin{aligned} a_{z_m} &= \lim_{s\to z_m}((s - z_m)F(s)) \\ &= \frac{1}{z_m}Y^{z_m} \cdot \lim_{s\to z_m}\left((s - z_m)\cdot\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) = \frac{hY^{z_m}}{z_m}。 \end{aligned} \tag{23}$$

由(7)～(11)、(22)和(23)，可得

$$\psi(x,\chi) = \frac{\theta}{1-\tilde{\beta}} - \sum\nolimits_1 \frac{1}{\rho}Y^{\rho} = O\left(\frac{x}{T}(\log(xQ))^2\right), \tag{24}$$

这里 $\sum_1$ 表示对 $L(s,\chi)$ 满足 $-T'' < r_n < T'$ 的非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 求和，其中一个 h 阶零点被重复计数了 h 次，$h \geqslant 1$。当 Q - 例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在，即 $\theta = 1$ 时，$\tilde{\beta}$ 及 $1 - \tilde{\beta}$ 各被计数于 $\sum_1$ 中 1 次。由 Cauchy 中值定理可知存在 $\xi \in (0, 1 - \tilde{\beta})$，使得

$$\frac{Y^{1-\tilde{\beta}} - 1}{1-\tilde{\beta}} = \frac{e^{(1-\tilde{\beta})\log Y} - 1}{1-\tilde{\beta}} = (\log Y)\cdot e^{\xi\log Y}$$

$$\leqslant (\log Y) \cdot e^{(1-\tilde{\beta})\log Y} = O(x^{1/2}\log x); \qquad (25)$$

这里我们应用了(21)。由于 $T \leqslant T', T'' \leqslant T+1$，应用定理 1.5.10 的(iii) 的(a)，我们得

$$\sum\nolimits_2 \frac{1}{\rho} Y^{\rho} = \sum\nolimits_3 \frac{1}{\rho} Y^{\rho} + O\Big(\frac{x}{T} \sum_{T \leqslant |r_n| \leqslant T+1} 1\Big)$$

$$= \sum\nolimits_3 \frac{1}{\rho} Y^{\rho} + O\Big(\frac{x}{T}\log(qT)\Big), \qquad (26)$$

这里 $\sum_2$ 表示对于满足 $\rho_n = \beta_n + ir_n, -T'' \leqslant r_n \leqslant T', \rho_n \neq \tilde{\beta}, 1-\tilde{\beta}$(若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的非平凡零点 ρ_n 求和，$\sum_3$ 对于满足 $\rho_n = \beta_n + ir_n, |r_n| \leqslant T, \rho_n \neq \tilde{\beta}, 1-\tilde{\beta}$(若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的非平凡零点 ρ_n 求和。当 s 为实数，且 $s \neq 0$ 时，若 $x_2 > x_1 > 0$，则由实函数积分，显然有

$$x_2^s - x_1^s = s\int_{x_1}^{x_2} u^{s-1}\mathrm{d}u, \qquad (27)$$

其中对于正数 ξ，ξ^s 定义为 $e^{s\log\xi}$，对数值取主分支。若允许 s 取复数，显然(27) 左边作为 s 的函数是整函数，而应用引理 1.1.1 类似的证法，可知(27) 右边的函数也为 s 的整函数(这时积分仍是沿从 x_1 到 x_2 的直线段取的)，因此由解析开拓可知(27) 总成立。特别地，当 ρ 被计数于 $\sum_3$ 中时，我们得

$$Y^{\rho} - x^{\rho} = \rho\int_x^Y u^{\rho-1}\mathrm{d}u \ll |\rho| \Big|\int_Y^x u^{\beta-1}\mathrm{d}u\Big| \ll |\rho| \cdot x^{\beta-1} \ll |\rho|,$$

因此，由定理 1.5.10 的(iii) 的(b)，我们得

$$\sum\nolimits_3 \frac{1}{\rho} Y^{\rho} = \sum\nolimits_3 \frac{1}{\rho} x^{\rho} + O(T\log(qT))。 \qquad (28)$$

由(24) ~ (26) 以及(28)，当 $3 \leqslant T \leqslant \sqrt{x}$ 时，我们有

$$\psi(x,\chi) = -\theta\frac{1}{\tilde{\beta}}x^{\tilde{\beta}} - \sum{}' \frac{1}{\rho}x^{\rho} + O\Big(\frac{x}{T}(\log(Qx))^2\Big),$$

其中 $\sum'$ 表示对于满足 $|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T, \rho \neq \tilde{\beta}, 1-\tilde{\beta}$(若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的

$L(s,\chi)$ 的非平凡零点求和。这就证明了(i)。

(ii) 可与(i) 类似地加以证明,这时我们的出发点为(见引理 1.5.1 的(iii) 的证明)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}s>1,$$

并相应地要应用定理 1.5.11、引理 1.6.2、引理 1.6.3、残数定理、推论 1.4.9 以及定理 1.3.5 的(ii)。所需额外注意者为,在运用残数定理时(相应于(8)),若令 $F(s)=x^s\zeta'(s)/(s\zeta(s))$,则 $F(s)$ 以 $s=1$ 为 1 阶极点,且相应的残数为 $-x$。这是因为,由定理 1.3.5 的(ii) 可知,存在在$\{s\mid |s|<2\}$ 中解析的函数 $G(s)$,使得当 $s\neq 1$ 时,$G(s)=(s-1)\zeta(s)$,且 $G(1)\neq 0$。于是,当 $s\neq 1,|s|<2$ 时,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{G'(s)}{G(s)}-\frac{1}{s-1},$$

由此即得所需结论(实际上,我们可扩充定义 $G(s)$ 成为一个整函数)。另外 $F(s)$ 在 $s=0$ 处的残数为 $\zeta'(0)/\zeta(0)$。这就使得在(i) 中相应于 $\psi(x,\chi)$ 所作的讨论(12) ~ (22) 以及(25) 在(ii) 中对于 $\psi(x)$ 而言成为不必要的了。

(iii) 若 $\rho=\beta+i\gamma$ 为 $\zeta(s)$ 的任一个非平凡零点,则由引理 1.5.9 可知必有 $|\gamma|>1$(见定理 1.5.8 的证明过程)。由定理 1.5.8 可知,若 $|\gamma|\leqslant T$,则有

$$1-\beta>\frac{c_{16}}{\log(T+2)}。$$

因此,若取 $T=\exp\left(\sqrt{\frac{c_{16}}{2}}(\log x)^{1/2}\right)$,则由(ii) 及定理 1.5.14 的(ii) 的(b) 可得

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=x+O\Big(\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta}\Big)+O(xT^{-1}(\log x)^2)$$

$$= x + O(e^{-\sqrt{2c_{16}}}\sum_{\gamma\leqslant T}1) + O(xT^{-1}(\log x)^2)$$

$$= x + O\left(x\exp\left(-\sqrt{\frac{1}{2}c_{16}}(\log x)^{1/2}\right)(\log x)^2\right)。$$

因此,只要 λ_1 是大于$\sqrt{\frac{1}{2}c_{16}}$ 的常数,(iii) 就成立。

(iv) 与(1) 类似地,我们可得

$$\pi(x) = \sum_{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x}\psi(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\psi([x])}{\log([x]+1)} + O(x^{1/2}\log x)。\tag{29}$$

由于(iii) 中的 x 是任意的,因此由(29) 及(iii) 可得

$$\pi(x) = \sum_{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x}(n + O(n\exp(-\lambda_1(\log n)^{1/2})))\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right)$$

$$+ \frac{[x]}{\log([x]+1)} + O(x\exp(-\lambda_1(\log x)^{1/2}))$$

$$= \sum_{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{\log n} - \sum_{\sqrt{x}+1\leqslant n\leqslant x+1}\frac{n-1}{\log n} + \frac{[x]}{\log([x]+1)}$$

$$+ O\left(x\exp\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}(\log x)^{1/2}\right)\right)$$

$$= \sum_{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log n} + O\left(x\exp\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}(\log x)^{1/2}\right)\right);$$

这里已用到了$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} = O\left(\frac{1}{n(\log n)^2}\right)$。应用推论 1.1.4, 可得

$$\sum_{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\log n} = \int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{du}{\log u} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) = \int_2^x\frac{du}{\log u} + O(\sqrt{x})。$$

因此,(iv) 成立,且可取 $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1$。

(v) 由(2),我们知道

$$\psi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)}\psi(x,\chi_0) + \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\bar{\chi}(a)\psi(x,\chi),\tag{30}$$

这里 χ_0 为模 q 的主特征。由(ii) 我们有

$$\begin{aligned}\psi(x,\chi_0) &= \psi(x) + O((\log x)^2)\\ &= x + O(x\exp(-\lambda_1(\log x)^{1/2}))。\end{aligned} \tag{31}$$

设模 q 的非主特征 χ 由模 q_1 的原特征 χ_1 所诱导,即 $\chi = \chi\chi_0$,则由(3) 及(i)(在其中将(χ,q,Q) 换成(χ_1,q_1,q)),我们有

$$\begin{aligned}\psi(x,\chi) &= \psi(x,\chi_1) + O(\log x \cdot \log q)\\ &= -\theta \cdot \frac{1}{\tilde{\beta}}x^{\tilde{\beta}} - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T}{}' \frac{1}{\rho}x^{\rho} + O\left(\frac{x}{T}(\log(qx))^2\right),\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $3 \leqslant T \leqslant \sqrt{x}$,$\theta = 1$ 或 0 视是否存在 q - 例外零点 $\tilde{\beta}$ 而定(若 $\theta = 1$,则(χ_1,q_1) 即为 q - 例外对$(\widetilde{\chi},\widetilde{q})$,见定理 1.5.2),对 ρ 的求和通过 $L(s,\chi_1)$ 所有满足 $|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T$ 以及 $\rho \neq \tilde{\beta}, 1-\tilde{\beta}$(若 $\tilde{\beta}$ 存在)的非平凡零点 ρ。若将计数于 $\sum\limits_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T}{}'$ 中的任一个零点记为 $\rho = \beta + i\gamma$,则由定理 1.5.2 可知

$$1 - \beta > \frac{c_2}{\log(q(T+2))}。 \tag{33}$$

由推论 1.4.7 的证明,我们知道 $1 - \overline{\rho} = 1 - \beta + i\gamma$ 也为 $L(s,\chi_1)$ 的零点,且由 $\rho \neq 1 - \tilde{\beta}$ 可知 $1 - \overline{\rho} \neq \tilde{\beta}$。所以,由定理 1.5.2 又得

$$\beta = 1 - \mathrm{Re}(1 - \overline{\rho}) > \frac{c_2}{\log(q(T+2))}。 \tag{34}$$

由(33)、(34) 以及定理 1.5.10(iii)(b),我们得

$$\begin{aligned}\sum_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T}{}' \frac{1}{\rho}x^{\rho} &= O\left(x \cdot \log(qT) \cdot \exp\left(\frac{-c_2\log x}{\log(q(T+2))}\right)\left(\sum_{|\gamma| \leqslant T} 1\right)\right)\\ &= O\left(xT(\log(qT))^2\exp\left(\frac{-c_2\log x}{\log(q(T+2))}\right)\right)。\end{aligned} \tag{35}$$

当 $0 < \delta < 2/3$,$3 \leqslant q \leqslant (\log x)^{2-3\delta}$ 时,令 $T = \exp\left(\left(\frac{1}{2}c_2\log x\right)^{1/2}\right)$,则由(35) 得

$$\sum_{|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T}{}' \frac{1}{\rho} x^{\rho} = O\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}(c_2 \log x)^{1/2} \right) \right)。\qquad (36)$$

当 $\theta = 1$ 时，由定理 1.5.13 可知

$$\tilde{\beta} - 1 < -c(\delta) q^{-1/2-\delta/4} < -c(\delta)(\log x)^{(2-3\delta)(-1/2-\delta/4)}$$

$$< -c(\delta)(\log x)^{-1+\delta+3\delta^2/4},$$

因此，再由(21)就得到

$$\frac{1}{\tilde{\beta}} x^{\tilde{\beta}} = O(x \cdot x^{\tilde{\beta}-1}) = O(x\exp(-c(\delta)(\log x)^{\delta}))。\qquad (37)$$

由(32)、(36)及(37)，在 $0 < \delta < 1/2$ 及 $x \geqslant x_0(\delta) > 0$ 时，就有 $c_1(\delta) > 0$，使得

$$\psi(x, \chi) = O(x\exp(-c_1(\delta)(\log x)^{\delta}))。$$

(vi) 注意：(v) 中的 x 可被换成任何大于 $x_0(\delta)$ 的数。因此，当 $3 \leqslant q \leqslant (\log x)^{2-3\delta}$，$x \geqslant (x_0(\delta))^2$ 时，由(v)及(1)我们有

$$\pi(x; q, a) = \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \left(\frac{n}{\varphi(q)} + O(n\exp(-c_1(\delta)(\log n)^{\delta})) \right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right)$$

$$+ \left(\frac{[x]}{\varphi(q)} + O(x\exp(-c_1(\delta)(\log x)^{\delta})) \right)$$

$$\cdot \frac{1}{\log([x]+1)} + O(x^{1/2} \log x)$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{\log n} - \sum_{\sqrt{x}+1 \leqslant n \leqslant x+1} \frac{n-1}{\log n} \right.$$

$$\left. + \frac{[x]}{\log([x]+1)} \right) + O\left(x\exp\left(-\frac{1}{2} c_1(\delta)(\log x)^{\delta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\log n} \right)$$

$$+ O\left(x\exp\left(-\frac{1}{2} c_1(\delta)(\log x)^{\delta}\right)\right)。$$

在证明(iv) 的过程中,我们已证明

$$\sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\log n} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O(x^{1/2})。$$

因此,(vi) 成立。**证毕**。

定理 1.6.1 的(i) 通常被称为显式(explicit formula),因为在公式中明显地包含着 $L(s,\chi)$ 的除 $1-\tilde{\beta}$ 之外(若 Q - 例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在) 的全部非平凡零点。类似地,(ii) 也被称为显式。(iv) 通常被称为素数定理(有时也这样称呼(iii))。

定理 1.6.1 的(iii) 及(iv) 中的余项还可以应用指数和估计及函数论中的方法加以改进。

练　　习

(Ⅰ) 给出定理 1.6.1 的(ii) 的详细证明。

(Ⅱ) 应用定理 1.6.1 的(iii) 和引理 1.1.3 证明:若 $x \geqslant 3$,则

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + \delta_1 + O(\exp(-\delta_2(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

其中 δ_1 与 δ_2 为绝对常数,特别地 $\delta_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 > 0$,$\lambda_1$ 为定理1.6.1 的(iii) 中的常数。

第二章

大筛法与 L 函数的零点密度估计

历史上,大筛法的出现是为了研究与素数有关的问题。

§2.1 大筛法

考虑以复数为纯量的线性赋范空间 P,其元素是 N 维向量(N 为正整数),即$(x_1,\cdots,x_N)$,其中 x_i 为任意的复数。对任意的复数 α 与β,及任意元素 $x,y\in P$,

$$x=(x_1,\cdots,x_N),y=(y_1,\cdots,y_N),$$

元素 $\alpha x+\beta y$ 定义为$(\alpha x_1+\beta y_1,\cdots,\alpha x_N+\beta y_N)$,元素 x 与 y 的内积(x,y)为一个复数,

$$(x,y)=x_1\overline{y}_1+\cdots+x_N\overline{y}_N,$$

这里 $\overline{y}_1$ 表示 y_1 的共轭复数。特别地,元素 $x=(x_1,\cdots,x_N)$的范数定义为

$$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_N|^2}。$$

显然,$\|x\|\geqslant 0$,并且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x_1=\cdots=x_N=0$,即 $x=(0,\cdots,0)$ 为 P 中零元素。所谓大筛法(the large sieve),粗略地说,即是关于线性赋范空间 P 中若干元素内积的绝对值之和或绝对值平方之和的一些适当的上界估计(因此,"大筛法"与通常所说的"筛法"并无直接的关系)。这里我们将要证明几个大筛法型的不等式。在建立这些不等式的过程中,所利用的基本事实为

$\| x \| \geqslant 0$ 对每个 $x \in P$ 成立。

我们有

定理 2.1.1 (i) 设 ξ 和 $\psi_1,\cdots,\psi_R$ 为 P 中任意的 N 维向量，R 为任意正整数，则

$$\sum_{r=1}^{R} |(\xi,\psi_r)|^2 \leqslant \max_{1\leqslant r\leqslant R}\Big(\sum_{s=1}^{R}|(\psi_r,\psi_s)|\Big)\cdot \|\xi\|^2。$$

(ii) 设 B 为由形如 (q,χ,s) 的元素组成的一个有限集合，其中 q 为正整数，χ 为模 q 的特征，s 为适当的复数，又设 ϕ_n 及 $\lambda_{n,q}$ 为任意的复数，$1\leqslant n\leqslant N$，并且

$$H(q,\chi,s)=\sum_{n=1}^{N}\phi_n\lambda_{n,q}\chi(n)n^{-s}。$$

则对于任意的正数 $b_1,\cdots,b_N$，成立着

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{(q,\chi,s)\in B}|H(q,\chi,s)|\Big)^2\\ \leqslant&\Big(\sum_{n=1}^{N}|\phi_n|^2 b_n^{-1}\Big)\cdot\Big(\sum_{(q,\chi,s)\in B}\ \sum_{(q',\chi',s')\in B}\Big|\\ &\sum_{n=1}^{N} b_n\bar{\lambda}_{n,q}\lambda_{n,q'}\bar{\chi}(n)\chi'(n)n^{-\bar{s}-s'}\Big|\Big)。\end{aligned}$$

证明：(i) 设 $\psi_1,\cdots,\psi_R$ 为一组 P 中元素，$u_1,\cdots,u_R$ 为任意一组复数。则

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{1\leqslant r\leqslant R}u_r\psi_r\Big\|^2 &=\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\ \sum_{1\leqslant s\leqslant R}u_r\bar{u}_s(\psi_r,\psi_s)\\ &\leqslant\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\ \sum_{1\leqslant s\leqslant R}|u_r\bar{u}_s|\,|(\psi_r,\psi_s)|\\ &\leqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\ \sum_{1\leqslant s\leqslant R}(|u_r|^2+|u_s|^2)|(\psi_r,\psi_s)|\\ &=\sum_{1\leqslant r\leqslant R}|u_r|^2\sum_{1\leqslant s\leqslant R}|(\psi_r,\psi_s)|\\ &\leqslant A\cdot\Big(\sum_{1\leqslant r\leqslant R}|u_r|^2\Big),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $A=\max_{1\leqslant r\leqslant R}\Big(\sum_{1\leqslant s\leqslant R}|(\psi_r,\psi_s)|\Big)$。对于任取的 P 中元素 ξ 与 x，

$$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N), x = (x_1, \cdots, x_N),$$

我们有

$$\begin{aligned}0 \leqslant (\xi - x, \xi - x) &= \| \xi - x \|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\xi_i - x_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} (|\xi_i|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi_i \bar{x}_i) + |x_i|^2) \\ &= \| \xi \|^2 - 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^{N} \xi_i \bar{x}_i\Big) + \| x \|^2 \\ &= \| \xi \|^2 - 2\mathrm{Re}(\xi, x) + \| x \|^2。\end{aligned}$$

特别地，令 $x = \sum_{r=1}^{R} u_r \psi_r$，则由

$$(\xi, x) = \sum_{r=1}^{R} \bar{u}_r (\xi, \psi_r),$$

可得

$$2\mathrm{Re}\Big(\sum_{r=1}^{R} \bar{u}_r (\xi, \psi_r)\Big) \leqslant \| \xi \|^2 + \| \sum_{r=1}^{R} u_r \psi_r \|^2。\tag{2}$$

由(1) 及(2)，我们得

$$2\mathrm{Re}\Big(\sum_{r=1}^{R} \bar{u}_r (\xi, \psi_r)\Big) \leqslant \| \xi \|^2 + A\Big(\sum_{1 \leqslant r \leqslant R} |u_r|^2\Big),\tag{3}$$

其中 $A = \max\limits_{r}\Big(\sum\limits_{1 \leqslant s \leqslant R} |(\psi_r, \psi_s)|\Big) \geqslant \max\limits_{r} \| \psi_r \|^2$。若 $\sum\limits_{1 \leqslant T \leqslant R} \| \psi_r \| > 0$，则 $A > 0$。在(3) 中选取 $u_r = (\xi, \psi_r)/A$，则易得

$$\frac{2}{A}\Big(\sum_{r=1}^{R} |(\xi, \psi_r)|^2\Big) \leqslant \| \xi \|^2 + \frac{1}{A} \sum_{r=1}^{R} |(\xi, \psi_r)|^2,$$

由此可证得(i)。若 $\sum\limits_{1 \leqslant r \leqslant R} \| \psi_r \| = 0$，则每个 ψ_r 为零元素，因此(i)显然成立。

(ii) 由(1) 的推导及(2) 我们有

$$2\mathrm{Re}\Big(\sum_{r=1}^{R} \bar{u}_r (\xi, \psi_r)\Big) \leqslant \| \xi \|^2$$

$$+\sum_{r=1}^{R}|u_r|^2\Big(\sum_{s=1}^{R}|(\psi_r,\psi_s)|\Big)。\tag{4}$$

设$(\xi,\psi_r)=|(\xi,\psi_r)|e^{i\theta_r}$,这里$\theta_r$为实数,在$(\xi,\psi_r)=0$时无妨取$\theta_r=0$。先设$\sum\limits_{1\leqslant r\leqslant R}\|\psi_r\|>0$,在(4)中选取$(1\leqslant r\leqslant R)$

$$u_r=\|\xi\|\exp(i\theta_r)B^{-1/2},B=\sum_{r=1}^{R}\sum_{s=1}^{R}|(\psi_r,\psi_s)|$$

则可得

$$\begin{aligned}2\|\xi\|B^{-1/2}\Big(\sum_{r=1}^{R}|(\xi,\psi_r)|\Big)&\leqslant\|\xi\|^2+\|\xi\|^2B^{-1}\cdot B\\&=2\|\xi\|^2,\end{aligned}$$

由此可知,当$\|\xi\|\neq0$时,

$$\sum_{r=1}^{R}|(\xi,\psi_r)|\leqslant\|\xi\|\cdot B^{1/2},B=\sum_{r=1}^{R}\sum_{s=1}^{R}|(\psi_r,\psi_s)|。\tag{5}$$

当$\|\xi\|=0$时,ξ为P中的零元素$(0,\cdots,0)$,因此式(5)仍成立。若$\sum\limits_{1\leqslant r\leqslant R}\|\psi_r\|=0$,则每个$\psi_r$都为零元素,所以式(5)总成立。按照(ii)的假设,设q为正整数,χ为模q的特征,s为适当的复数,(q,χ,s)属于一个适当的有限集合B,并令

$$H(q,\chi,s)=\sum_{n=1}^{N}\phi_n\lambda_{n,q}\chi(n)n^{-s},$$

其中ϕ_n及$\lambda_{n,q}$为复数。若$b_1,\cdots,b_N$为一组正数,则

$$H(q,\chi,s)=(\xi,\psi(q,\chi,s)),$$

其中$(\xi,\psi(q,\chi,s))$表示P中的元素ξ与$\psi(q,\chi,s)$的内积,而

$$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N),\psi(q,\chi,s)=(\beta_1,\cdots,\beta_N),$$

这里$\xi_k=\phi_kb_k^{-1/2},\beta_k=\beta_k(q,\chi,s)=\overline{\lambda}_{k,q}b_k^{1/2}\overline{\chi}(k)k^{-\bar{s}},1\leqslant k\leqslant N,\overline{\chi}$和$\bar{s}$分别表示共轭特征与共轭复数。设$B$中共有$R$个元素,它们排序为$(q_1,\chi_1,s_1),\cdots,(q_R,\chi_R,s_R)$。则由(5)我们得

$$\Big(\sum_{(q,\chi,s)\in B}|H(q,\chi,s)|\Big)^2=\Big(\sum_{r=1}^{R}|(\xi,\psi(q_r,\chi_r,s_r))|\Big)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |\phi_k|^2 b_k^{-1} \right) \left(\sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{R} |(\psi(q_r, \chi_r, s_r), \psi(q_t, \chi_t, s_t))| \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} |\phi_k|^2 b_k^{-1} \right) \cdot \left(\sum_{(q,\chi,s)\in B} \sum_{(q',\chi',s')\in B} \left| \sum_{n=1}^{N} \bar{\lambda}_{n,q} \lambda_{n,q'} b_n \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-\bar{s}-s'} \right| \right)。$$

(ii) **证毕**。

引理 2.1.2　设 J 为正整数，α 为任意实数，$e(\xi) = \exp(2\pi i\xi)$，则

$$\sum_{|j|\leqslant J} (J - |j|) e(j\alpha) = \left| \sum_{j=1}^{J} e(j\alpha) \right|^2 = \left(\frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} \right)^2,$$

其中当 α 为整数时，$\sin(\pi J\alpha)/\sin(\pi\alpha)$ 应理解为极限值，即

$$\frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\sin(\pi J\beta)}{\sin(\pi\beta)} = J。$$

证明：显然

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{J} e(j\alpha) \right|^2 &= J + \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant J} e((j_1 - j_2)\alpha) + \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant J} e((j_2 - j_1)\alpha) \\
&= J + \sum_{1\leqslant j\leqslant J-1} e(-j\alpha) \Big(\sum_{\substack{j_2-j_1=j \\ 1\leqslant j_1<j_2\leqslant J}} 1 \Big) + \sum_{1\leqslant j\leqslant J-1} e(j\alpha) \Big(\sum_{j_2-j_1=j} 1 \Big) \\
&= J + \sum_{1\leqslant j\leqslant J-1} (J - j) e(-j\alpha) + \sum_{1\leqslant j\leqslant J-1} (J - j) e(j\alpha) \\
&= J + \sum_{1\leqslant |j|\leqslant J-1} (J - |j|) e(j\alpha) \\
&= \sum_{|j|\leqslant J} (J - |j|) e(j\alpha),
\end{aligned}$$

并且，当 α 不为整数时，

$$\left| \sum_{j=1}^{J} e(j\alpha) \right| = \left| \frac{1 - e(J\alpha)}{1 - e(\alpha)} \right| = \left| \frac{e\left(-\frac{J\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{J\alpha}{2}\right)}{e\left(-\frac{\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right|$$

$$= \left| \frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} \right|, \tag{6}$$

而当 α 为整数时,由于$\frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}$的值已定义成了极限值 J,可知(6) 仍成立。**证毕**。

定理 2.1.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_R$ 为任意一组满足当 $r\neq s$ 时

$$\|\alpha_r-\alpha_s\|\geqslant\delta>0$$

的实数,这里 $\|\lambda\|$ 表示实数 λ 与距其最近的整数之间的距离。设 $e(\xi)=\exp(2\pi i\xi)$。我们有

(i) 若 K 为正整数,A_n 为复数,$-K\leqslant n\leqslant K$,则成立着

$$\sum_{r=1}^{R}\left|\sum_{n=-K}^{K}A_ne(n\alpha_n)\right|^2\leqslant(2K+1+2\delta^{-1})\Big(\sum_{n=-K}^{K}|A_n|^2\Big)。$$

(ii) 若 M 及 N 为整数,$N\geqslant1$,a_n 为任意复数,$M+1\leqslant n\leqslant M+N$,

$$S(\alpha)=\sum_{n=M+1}^{M+N}a_ne(n\alpha),$$

则

$$\sum_{r=1}^{R}|S(\alpha_r)|^2\leqslant(N+2\delta^{-1}+\theta)\Big(\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2\Big),$$

其中若 N 为偶数,则 $\theta=1$,若 N 为奇数,则 $\theta=0$。

证明:(i) 令 $L=[\delta^{-1}]+1$,则由 $\delta\leqslant1/2$,可知 $L\geqslant3$。考虑 $N=2(K+L)-1$ 维向量 ξ 与 $\psi_1,\cdots,\psi_R$,它们定义为

$$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N),\psi_r=(\psi_r^{(1)},\cdots,\psi_r^{(N)}),$$

其中

$\xi_i=0$,若 $1\leqslant i\leqslant L-1$ 或 $2K+L+1\leqslant i\leqslant2K+2L-1=N$,

$\xi_i=A_{i-K-L}b_{i-K-L}^{-1/2}$,若 $L\leqslant i\leqslant2K+L$,

$\psi_r^{(i)}=b_{i-K-L}^{1/2}e((i-K-L)\alpha_r)$,$1\leqslant i\leqslant N$,$1\leqslant r\leqslant R$,

而 b_k 则是一组正数,定义为

$$b_k=\begin{cases}1, & 当|k|\leqslant L时,\\1-(|k|-K)/L, & 当K+1\leqslant|k|\leqslant K+L-1时。\end{cases}$$

由定理 2.1.1 的(i),我们有

$$\sum_{r=1}^{R}\left|\sum_{n=-K}^{K}A_n e(n\alpha_r)\right|^2 = \sum_{r=1}^{R}|(\xi,\psi_r)|^2$$
$$\leqslant A\cdot\Big(\sum_{n=-K}^{K}|A_n|^2 b_n^{-1}\Big), \tag{7}$$

其中

$$A = \max_{1\leqslant r\leqslant R}\Big(\sum_{1\leqslant s\leqslant R}|B(\alpha_r-\alpha_s)|\Big), B(\alpha) = \sum_{|n|\leqslant N_1} b_n e(n\alpha),$$

而 $N_1 = K + L - 1$。对于实数 α,我们有

$$B(\alpha) = \sum_{|k|\leqslant K} e(k\alpha) + \frac{1}{L}\sum_{K+1\leqslant|k|\leqslant N_1}(K+L-|k|)e(k\alpha)$$
$$= \frac{1}{L}\sum_{|k|\leqslant K+L} e(k\alpha) - \frac{1}{L}\sum_{|k|\leqslant K}(K-|k|)e(k\alpha),$$

因此由引理 2.1.2 可得

$$B(\alpha) = \frac{1}{L}[(\sin(\pi(K+L)\alpha))^2 - (\sin(\pi K\alpha))^2](\sin(\pi\alpha))^{-2}。$$

由此可知,当 α 为整数时

$$B(\alpha) = \frac{1}{L}((K+L)^2 - K^2) = L + 2K, \tag{8}$$

而当 α 不为整数时,应用当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时成立的不等式 $\sin\theta\geqslant 2\theta/\pi$,可得

$$|B(\alpha)| \leqslant \frac{1}{L}(\sin(\pi\alpha))^{-2} = \frac{1}{L}(\sin(\pi\|\alpha\|))^{-2} \leqslant \frac{1}{4L}\|\alpha\|^{-2}。\tag{9}$$

对于给定的整数 $r, 1\leqslant r\leqslant R$,我们需要在 $s\neq r$ 及 $1\leqslant s\leqslant R$ 时,在某种意义上更精确地估计 $\|\alpha_r-\alpha_s\|$ 的下界(注意:由假设已知 $\|\alpha_r-\alpha_s\|\geqslant\delta$),这就需要给这些 α_s 适当地排序。为达此目的,我们的想法是,设法找个数 β_s,使得 β_s 与 α_s 之差为整数,且 $\beta_s\in(\alpha_r-1/2,\alpha_r+1/2]$,因为这样就有 $\|\alpha_r-\alpha_s\| = \|\alpha_r-\beta_s\| = |\alpha_r-\beta_s|$。然后,根据 β_s 的大小给 α_s 排序。这是可以办到

的，因为区间$(\alpha_r - 1/2 - \alpha_s, \alpha_r + 1/2 - \alpha_s]$中存在唯一的整数$k_{s,r}$。我们令$\beta_s = \alpha_s + k_{s,r}$，则$\alpha_r - 1/2 < \beta_s \leqslant \alpha_r + 1/2$。因为当$s \neq r$时，$\| \alpha_r - \alpha_s \| \geqslant \delta > 0$，我们无妨设当$1 \leqslant s \leqslant R, s \neq r$时，有$p$个$s$的值$s_1, \cdots, s_p$，满足$\alpha_r - 1/2 < \beta_s < \alpha_r$，且

$$\alpha_r - 1/2 < \beta_{s_1} < \beta_{s_2} < \cdots < \beta_{s_p} < \alpha_r,$$

并有$q = R - 1 - p$个s的值$t_1, \cdots, t_q$满足$\alpha_r < \beta_s \leqslant \alpha_r + 1/2$，且

$$\alpha_r < \beta_{t_1} < \beta_{t_2} < \cdots < \beta_{t_q} \leqslant \alpha_r + 1/2。$$

则

$$\| \alpha_r - \alpha_{s_p} \| = \| \alpha_r - \beta_{s_p} \| \geqslant \delta,$$

$$\begin{aligned}\| \alpha_r - \alpha_{s_{p-1}} \| = \| \alpha_r - \beta_{s_{p-1}} \| &= \alpha_r - \beta_{s_{p-1}} \\ &= (\alpha_r - \beta_{s_p}) + (\beta_{s_p} - \beta_{s_{p-1}}) \\ &= \| \alpha_r - \alpha_{s_p} \| + \| \alpha_{s_p} - \alpha_{s_{p-1}} \| \geqslant 2\delta,\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\| \alpha_r - \alpha_{s_1} \| = \| \alpha_r - \beta_{s_1} \| = \alpha_r - \beta_{s_1} &= (\alpha_r - \beta_{s_p}) \\ &+ (\beta_{s_p} - \beta_{s_{p-1}}) + \cdots + (\beta_{s_2} - \beta_{s_1}) \\ &= \| \alpha_r - \alpha_{s_p} \| + \| \alpha_{s_p} - \alpha_{s_{p-1}} \| + \cdots \\ &+ \| \alpha_{s_2} - \alpha_{s_1} \| \geqslant p\delta,\end{aligned}$$

并且类似地可得

$$\| \alpha_t - \alpha_{t_1} \| \geqslant \delta, \| \alpha_r - \alpha_{t_2} \| \geqslant 2\delta, \cdots, \| \alpha_r - \alpha_{t_q} \| \geqslant q\delta。$$

于是，当r固定时，由(8)及(9)可得(不难看出，若$p = 0$或$q = 0$，则也成立)

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{R} | B(\alpha_s - \alpha_r) | &\leqslant 2K + L + 2 \cdot \frac{1}{4L} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n\delta)^{-2} \\ &= 2K + L + \frac{1}{2L}\delta^{-2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\Big)。\end{aligned} \tag{10}$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 2,$$

所以

$$2K + L + \frac{1}{2L} \cdot \delta^{-2} \cdot 2 \leqslant 2K + \delta^{-1} + 1 + \delta^{-1} = 2K + 2\delta^{-1} + 1。 \tag{11}$$

由(7),(10) 及(11),可得(i)。

(ii) 若 N 为偶数,令 $a_{M+N+1} = 0, K = N/2$,以及

$$A_n = a_{n+M+K+1}, \ -K \leqslant n \leqslant K,$$

则由

$$S(\alpha_r) = \sum_{n=M+1}^{M+N+1} a_n e(n\alpha_r) = \sum_{n=-K}^{K} a_{n+M+K+1} e((n + M + K + 1)\alpha_n)$$
$$= \left(\sum_{n=-K}^{K} A_n e(n\alpha_r)\right) e((M + K + 1)\alpha_r)$$

及(i) 即得(ii)。若 N 为奇数,令 $K = \frac{N-1}{2}$,以及

$$A_n = a_{n+M+K+1}, \ -K \leqslant n \leqslant K,$$

则由

$$S(\alpha_r) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha_r) = \sum_{n=-K}^{K} a_{n+M+K+1} e((n + M + K + 1)\alpha_r)$$
$$= \left(\sum_{n=-K}^{K} A_n e(n\alpha_r)\right) e((M + K + 1)\alpha_r)$$

及(i) 即得(ii)。**证毕**。

作为定理 2.1.3 的(ii) 的一个应用,我们有

定理 2.1.4 设 χ 为模 q 的原特征,并令

$$T(\chi) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n),$$

此处 a_n 为任意复数。则对于 $Q \geqslant 3$,有

$$\sum_{3 \leqslant q \leqslant Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} |T(\chi)|^2 \leqslant (N + 2Q^2 + 1) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

其中$\sum\limits_{\chi}{}^{*}$表示求和通过模 q 的所有原特征 χ。

证明:由定理 1.2.3 的(i) 及(ii) 可知,当 χ 为模 q 的原特征时,

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\overline{\chi}(a)e\left(\frac{na}{q}\right)$$

总成立,且其中$|\tau(\overline{\chi})| = \sqrt{q}$。因此

$$T(\chi) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\overline{\chi}(a)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right),$$

$$\sum_{\chi}{}^{*}|T(\chi)|^2 \leqslant \frac{1}{q}\sum_{\chi}\left|\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\overline{\chi}(\alpha)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2, \quad (12)$$

其中$\sum\limits_{\chi}$表示对模 q 所有特征求和。将(12) 右边的平方展开,并应用定理 1.2.2 的(ii),可得

$$\begin{aligned}\sum_{\chi}{}^{*}|T(\chi)|^2 &\leqslant \frac{1}{q}\sum_{\chi}\sum_{1\leqslant a_1,a_2\leqslant q}\overline{\chi}(a_1)\chi(a_2)\cdot\\ &\quad\sum_{n_1=M+1}^{M+N}\sum_{n_2=M+1}^{M+N}a_{n_1}\overline{a_{n_2}}e\left(\frac{a_1n_1-a_2n_2}{q}\right)\\ &= \frac{\varphi(q)}{q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2。\end{aligned}$$

所以,为证定理 2.1.4,我们只需证明

$$\begin{aligned}\lambda &= \sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2\\ &\leqslant (N+2Q^2+1)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2。\end{aligned} \quad (13)$$

为此,我们应用定理 2.1.3 的(ii)。令

$$\mathscr{A} = \left\{\frac{a}{q}\,|\,1\leqslant a\leqslant q\leqslant Q,(a,q)=1\right\}$$

即 $\mathscr{A}$ 为不超过 1、分子与分母互素、且分母不超过 Q 的正分数全体的集合。设 $\mathscr{A}$ 中元素个数为 R,并将 $\mathscr{A}$ 中元素排序为 $\alpha_1,\cdots,$

α_R。则显然

$$\lambda = \sum_{r=1}^{R} \Big| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(\alpha_r n) \Big|^2。$$

当 $r \neq s$ 时，$\| \alpha_r - \alpha_s \| = |\alpha_r - \alpha_s|$ 或 $1 - |\alpha_r - \alpha_s|$。由于当 $a/q \in \mathscr{A}, a'/q' \in \mathscr{A}$ 且 $a/q \neq a'/q'$ 时，

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| = \frac{|a'q - aq'|}{qq'} \geqslant \frac{1}{qq'} \geqslant Q^{-2},$$

$$1 - \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| = \frac{qq' - |a'q - aq'|}{qq'}$$

$$\geqslant \frac{\min(aq', a'q)}{qq'} \geqslant \frac{1}{qq'} \geqslant Q^{-2},$$

所以当 $r \neq s$ 时，$\| \alpha_r - \alpha_s \| \geqslant Q^{-2}$。于是，根据定理2.1.3的(ii)，在其中选取 $\delta = Q^{-2}$，可得估计

$$\sum_{r=1}^{R} \Big| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(\alpha_r n) \Big|^2 \leqslant (N + 2Q^2 + 1) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

即(13) 成立。定理 2.1.4 **证毕**。

练　　习

（Ⅰ）当 α 为实数，$J \geqslant 1$，J 不是整数时，利用引理2.1.2证明

$$\sum_{|j| \leqslant J} (J - |j|) e(j\alpha) =$$

$$\frac{(\sin(\pi[J]\alpha))^2(1 - \{J\}) + (\sin(\pi([J]+1)\alpha))^2\{J\}}{(\sin(\pi\alpha))^2},$$

其中$[J]$为不超过 J 的最大整数，$\{J\} = J - [J]$。在 α 为整数时，这个等式右端应理解为将 α 换成β 后，令 $\beta \to \alpha$ 所得到的极限值

$$[J]^2(1 - \{J\}) + ([J]+1)^2\{J\}。$$

（Ⅱ）证明$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \frac{7}{4}$，并由此证明定理 2.1.3 的(i) 及(ii) 中 $2\delta^{-1}$ 这项可被改进为$\sqrt{\frac{7}{2}}\,\delta^{-1}$。

§ 2.2 Mellin 变换及其应用

设 $f(x)$ 是定义在实直线 $R^1 = (-\infty, \infty)$ 上的实值函数，$f(x)$ 在 R^1 上绝对可积，即 $f(x)$ 在包含于 R^1 的任何有限区间上绝对可积，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty。$$

这时，$f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(x)$ 定义为

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e(ux)\mathrm{d}u = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(u)e(ux)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} f(u)\cos(2\pi ux)\mathrm{d}u + i\int_{-A}^{A} f(u)\sin(2\pi ux)\mathrm{d}u\right), \quad (1)\end{aligned}$$

其中 $x \in R^1$，$e(\xi) = \exp(2\pi i\xi)$。由于 $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积，容易知道(1) 式中的极限必然存在，但 $\hat{f}(x)$ 未必是实的。我们需要在一定的条件下，能够从 $\hat{f}$ 求出 f。为此我们要证明下面的定理。

定理 2.2.1 (i) 我们有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

这里积分的值理解为当两个极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \quad \lim_{N\to+\infty}\int_{1}^{N} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

都存在时，它们的和。

(ii) 若实函数 f 在 R^1 上处处连续，且在点 x 处可导，则对任意的 a，$a > 0$，都有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y = \pi f(x),$$

这里展布于$[-a,a]$上的积分理解为当两个极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{a}f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y,\ \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-a}^{-\varepsilon}f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y \quad (2)$$

都存在时,它们的和(考虑到 $y=0$ 是被积函数的瑕点)。

(iii) 若 $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积,且 $f(x)$ 在 R^1 上处处可导(因而也处处连续),则

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)e(-ux)\mathrm{d}u。$$

证明:(i) 任给正数 ε 及 N,$0<\varepsilon<1/2$,$N>1$,我们有

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon}^{N}\sin x\left(\int_0^{\infty}e^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\varepsilon}^{N}\sin x\left(\int_0^{A}e^{-xy}\mathrm{d}y+O\left(\frac{1}{x}e^{-Ax}\right)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{A}\left(\int_{\varepsilon}^{N}(\sin x)e^{-xy}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+O\left(\frac{N}{\varepsilon}e^{-\varepsilon A}\right), \quad (3)\end{aligned}$$

其中 $A>1$。通过求不定积分,我们有

$$\int\sin x\cdot e^{-xy}\mathrm{d}x=-\frac{e^{-xy}(\cos x+y\sin x)}{1+y^2}+C,$$

其中 C 为任意常数。所以

$$\int_{\varepsilon}^{N}\sin x\cdot e^{-xy}\mathrm{d}x=\frac{e^{-\varepsilon y}(\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon)}{1+y^2}-\frac{e^{-Ny}(\cos N+y\sin N)}{1+y^2},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{A}\int_{\varepsilon}^{N}\sin x\cdot e^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{A}\frac{e^{-\varepsilon y}\cos\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y+\int_0^{A}\frac{e^{-\varepsilon y}\cdot y\sin\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y\\ &\quad -\int_0^{A}\frac{e^{-Ny}\cdot\cos N}{1+y^2}\mathrm{d}y-\int_0^{A}\frac{e^{-Ny}\cdot y\sin N}{1+y^2}\mathrm{d}y。\end{aligned} \quad (4)$$

由于 $e^{-\varepsilon y}\leqslant(\varepsilon y)^{-1}$,$e^{-Ny}\leqslant(Ny)^{-1}$,不难验证(4) 式右端的那些积分当 $A\to+\infty$ 时都存在。于是,在(3) 和(4) 式中 $A\to+\infty$,可得

$$\int_\varepsilon^N \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon y}\cos\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y + \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon y}\cdot y\sin\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-Ny}\cos N}{1+y^2}\mathrm{d}y - \int_0^\infty \frac{e^{-Ny}y\cdot\sin N}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4。 \tag{5}$$

由 $e^{-Ny} \leqslant (Ny)^{-1}$,我们有

$$I_3, I_4 = O\left(\frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right)。 \tag{6}$$

由 $e^{\varepsilon y} \geqslant 1+\varepsilon y \geqslant 2\sqrt{\varepsilon y}, 1+y^2 \geqslant 2y$,可得

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon y}\cdot y\sin\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y + \int_1^\infty \frac{e^{-\varepsilon y}y\sin\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sin\varepsilon + \left(\int_1^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1+y^2}\mathrm{d}y\right)\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = O\left(\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)。 \tag{7}$$

令 $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,则

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon y}\cdot\cos\varepsilon}{1+y^2}\mathrm{d}y - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\right| \leqslant \int_0^\delta \frac{|e^{-\varepsilon y}\cos\varepsilon - 1|}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$$+\int_\delta^\infty \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = J_1 + J_2。 \tag{8}$$

由于当 $0 \leqslant y \leqslant \delta$ 时,$e^{-\varepsilon y} = 1 + O(\sqrt{\varepsilon})$,所以

$$e^{-\varepsilon y}\cos\varepsilon - 1 = (1+O(\sqrt{\varepsilon}))\cos\varepsilon - 1$$

$$= -2\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + O(\sqrt{\varepsilon}) = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

因此 $J_1 = O(\sqrt{\varepsilon})$。又,显然有 $J_2 = O(\delta^{-1}) = O(\sqrt{\varepsilon})$。于是,由(5)~(8),可知两个极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

都存在,且它们的和为

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan y\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}。$$

(ii) 不等式 $|\sin z| \leqslant |z|$ 对任何实数 z 都成立。事实上，当 $|z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时它是熟知的，而在 $|z| > \frac{\pi}{2} > 1$ 时，它则是显然的。应用这个不等式，容易由定义验证：若 $F(u)$ 是任意的在区间 $[0, B]$ 上连续的函数，$u \in [0, B]$，$\lambda > 0$，则积分

$$\int_0^B F(u)\frac{\sin(\lambda u)}{u}\mathrm{d}u$$

存在。同样的结论对于区间 $[-B, 0]$ 也成立。特别地，我们就知道 (2) 中的两个积分都是存在的。我们来证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^a f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}f(x)。$$

为此，令

$$g(y) = \begin{cases}\dfrac{f(x+y)-f(y)}{y}, & 若\ y \neq 0,\\ f'(x), & 若\ y = 0。\end{cases}$$

由假设可知 $g(y)$ 为 R^1 上处处连续的函数。对于给定的 x，设 $|f(x+y)|$ 作为 y 的函数在区间 $[0, a]$ 上的最大值为 M。设 δ 是任一正数，$0 < \delta < a$，则

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^a f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}f(x)\right|\\ &\quad\leqslant \left|\int_\delta^a (f(x+y)-f(x))\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y\right|\\ &\quad+\left|f(x)\left(\frac{\pi}{2}-\int_\delta^a\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y\right)\right| + \left|\int_0^\delta f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y\right|\\ &\quad\leqslant \left|\int_\delta^a g(y)\sin(\lambda y)\mathrm{d}y\right| + \left|M\left(\frac{\pi}{2}-\int_{\lambda\delta}^{\lambda a}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right)\right| + M\lambda\delta。\end{aligned}$$

令 $\delta \to 0$，得

$$\left|\int_0^a f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}f(x)\right|$$

$$\leqslant \left| \int_0^a g(y)\sin(\lambda y)\mathrm{d}y \right| + M \left| \frac{\pi}{2} - \int_0^{\lambda a} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \right|。$$

再令 $\lambda \to +\infty$,则由引理 1.3.2 和(i) 可得

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^a f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}f(x)。$$

类似地,可证

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_{-a}^0 f(x+y)\frac{\sin(\lambda y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}f(x)。$$

所以(ii) 成立。

(iii) 在定理的条件下,应用不等式 $|\sin z| \leqslant |z|$(z 为实的),容易验证 $\hat{f}$ 在 R^1 上一致连续(因而连续)。由定义,这里要证明

$$f(x) = \lim_{\lambda \to +\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(u)e(-ux)\mathrm{d}u$$

对任何实数 $x \in R^1$ 成立。任取 $\varepsilon > 0$,由于 $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积,我们可选取正数 $a = a(\varepsilon)$,使得

$$\frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\mathrm{d}z < \frac{\varepsilon}{6}。$$

由(ii),

$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_{-a}^a f(x+y)\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{y}\mathrm{d}y = \pi f(x),$$

因此存在充分大正数 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$,使得当 $\lambda > \lambda_0$ 时,成立着

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_{-a}^a f(x+y)\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{y}\mathrm{d}y - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{6}。$$

当 $\lambda > \lambda_0$ 时,又可选取 $M = M(x,\lambda,\varepsilon) > 0$,使得

$$\lambda\left(\int_{M+x}^{\infty} |f(z)|\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{-M+x} |f(z)|\mathrm{d}z\right) < \frac{\varepsilon}{6}。$$

对于任意实数 u,我们有

$$\hat{f}(u) = \lim_{A \to +\infty}\int_{-A}^{A} f(y)e(yu)\mathrm{d}y = \int_{-M+x}^{M+x} f(y)e(yu)\mathrm{d}y + \Delta,$$

其中

$$\Delta = \Delta(M,x,u) = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{M+x}^{A} f(y)e(yu)\mathrm{d}y + \int_{-A}^{-M+x} f(y)e(yu)\mathrm{d}y\right),$$

$$|\Delta| \leqslant \int_{M+x}^{\infty} |f(z)|\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{-M+x} |f(z)|\mathrm{d}z < \frac{\varepsilon}{6\lambda}。$$

因此

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(u)e(-ux)\mathrm{d}u - f(x)\right|$$

$$= \left|\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\int_{-M+x}^{M+x} f(y)e(yu)\mathrm{d}y + \Delta\right)e(-ux)\mathrm{d}u - f(x)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{-M+x}^{M+x} f(y)\left(\int_{-\lambda}^{\lambda} e(u(y-x))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}y - f(x)\right| + \frac{\varepsilon}{3}。$$

由于当 $y \neq x$ 时，

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e((y-x)u)\mathrm{d}u = \frac{\sin(2\pi(y-x)\lambda)}{\pi(y-x)},$$

而若将 $y = x$ 看作 $y \to x$ 的极限情形，则这个等式仍成立，且等号两边的值为 2λ。因此

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(u)e(-ux)\mathrm{d}u - f(x)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{-M+x}^{M+x} f(y)\frac{\sin(2\pi\lambda(y-x))}{\pi(y-x)}\mathrm{d}y - f(x)\right| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \left|\int_{-M}^{M} f(x+y)\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y}\mathrm{d}y - f(x)\right| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leqslant \left|\int_{-a}^{a} f(x+y)\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y}\mathrm{d}y - f(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_{a}^{M} f(x+y)\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y}\mathrm{d}y\right|$$

$$+ \left|\int_{-M}^{-a} f(x+y)\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y}\mathrm{d}y\right| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \mathrm{d}y < \varepsilon。$$

由于 ε 是任取的正数,这就证明了(iii)。**证毕。**

设 $g(\lambda)$ 是当 $\lambda > 0$ 时有定义的实函数,使得当 $\operatorname{Re}s = \sigma > 0$ 时,$\lambda^{s-1}g(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 的任何有限区间上绝对可积,且积分

$$\int_0^1 \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda, \quad \int_1^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{9}$$

都绝对收敛,即

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_{\delta}^{1} \lambda^{\sigma-1} |g(\lambda)| \mathrm{d}\lambda < +\infty, \lim_{N\to +\infty}\int_1^N \lambda^{\sigma-1} |g(\lambda)| \mathrm{d}\lambda < +\infty, \tag{10}$$

其中 $\lambda^{s-1} = \exp((s-1)\log\lambda)$,对数值取主分支。积分

$$G(s) = \int_0^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

定义为(9)中两个积分之和,即

$$G(s) = \int_0^1 \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda + \int_1^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda。$$

由(10)式可知,$G(s)$ 的值当 $\operatorname{Re}s = \sigma > 0$ 时是确定的。我们称 $G(s)$ 为 $g(\lambda)$ 的 Mellin 变换。设 $s = \sigma + it$,$\sigma > 0$,t 为实数。我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda &= \lim_{\delta\to 0+}\int_{\delta}^{1} \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= 2\pi \lim_{\delta\to 0+}\int_{\delta_1}^{0} e^{2\pi u(\sigma+it)} g(e^{2\pi u})\mathrm{d}u \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{0} e^{(\sigma+it)2\pi u} g(e^{2\pi u})\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中当 $\delta \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时,我们作了变量替换 $\lambda = e^{2\pi u}$,$\delta_1 \leqslant u \leqslant 0$,$\delta_1 = \dfrac{\log\delta}{2\pi}$。类似地,可得

$$\int_1^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 2\pi\int_0^{\infty} e^{(\sigma+it)2\pi u} g(e^{2\pi u})\mathrm{d}u。$$

因此

$$G(\sigma+it)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}H(u)e(tu)\mathrm{d}u,\tag{11}$$

其中 $H(u)=e^{2\pi\sigma u}g(e^{2\pi u})$。由(10)，容易通过变量替换证明 $H(u)$ 在 $R^1=(-\infty,\infty)$ 上绝对可积。若进一步假设函数 $g(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处可导，则可知函数 $H(u)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上处处可导。因此，当我们把正实数 σ 看作固定，而把 $G(\sigma+it)$ 看作 t 的函数时，由(11)可知

$$G(\sigma+it)=2\pi\hat{H}(t)。$$

于是，由定理 2.2.1 的(iii)可得

$$H(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(y)e(-yu)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma+iy)e(-yu)\mathrm{d}y,$$

即

$$\begin{aligned}e^{2\pi\sigma u}g(e^{2\pi u})&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma+iy)e(-yu)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}G(\sigma+iy)e(-yu)\mathrm{d}y。\end{aligned}$$

因此，作变量替换 $e^{2\pi u}=v$，我们得

$$\begin{aligned}g(v)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}G(\omega)v^{-\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}G(\omega)v^{-\omega}\mathrm{d}\omega,\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}$ 表示沿复 ω 平面上从点 $\sigma-iT$ 至点 $\sigma+iT$ 的连线所作的积分。特别地，当 $g(\lambda)=e^{-\lambda}$，$\mathrm{Re}s=\sigma>0$ 时，由 §1.1 我们知道 $G(s)=\Gamma(s)$，因此，由(12)可得

$$e^{-v}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+iT}\Gamma(\omega)v^{-\omega}\mathrm{d}\omega,v>0,\sigma>0。\tag{13}$$

我们将应用(13)证明下面一个定理。

定理 2.2.2　设 $z>3$，(ξ_d) 是一组实数，$\xi_1=1$，$|\xi_d|\leqslant$

$|\mu(d)|$，且当 $d > z$ 时，$\xi_d = 0$。设 q 为一固定正整数，$q = 1$ 或 $q \geqslant 3$，函数 $\chi(n)$ 或者当 $q = 1, n \geqslant 1$ 时恒等于 1，或者当 $q \geqslant 3$ 时为模 q 的一个原特征。r 为一个正整数，$|\mu(r)| = 1$，$f(n)$ 为一个积性函数，$|f(n)| \leqslant n$，$f_r(n) = f((r,n))$。$1/2 \leqslant \mathrm{Re}\rho = \sigma < 1$，$\rho$ 为 $L(s,\chi)$ 的一个非平凡零点（当 $q = 1$ 时，$L(s,\chi) = \zeta(s)$）。设 x 为一个正实数，$x \geqslant z$，$y = x(\log x)^2$。令

$$E_0 = \begin{cases} 1, & \text{若 } q = 1, \chi(n) \equiv 1 (n \geqslant 1), \\ 0, & \text{若 } q \geqslant 3, \chi(n) \text{ 为模 } q \text{ 的原特征}, \end{cases}$$

$$M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega) = \sum_{d \leqslant z} \xi_d \chi(d) f_r(d) d^{-\rho-\omega} \cdot \prod_{p \mid \frac{r}{(r,q)}} (1 + \chi(p) p^{-\rho-\omega}(f(p) - 1)),$$

则有

$$e^{-1/x} + \sum_{2 \leqslant n \leqslant y} a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x}$$

$$= E_0 \Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} \frac{\varphi(q)}{q} M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,1-\rho) + $$

$$+ O(r x^{1/2-\sigma} z^{1/2} q^{1/4} \log(2q)),$$

其中 $a(n) = \sum_{d \mid n} \xi_d$。

证明：设 $K > 1$。在(13)中令 $\sigma = 2$，$v = n/x$，n 为任意正整数，则有

$$\begin{aligned} e^{-n/x} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to +\infty} \left(\int_{2-i(K+T)}^{2+i(K+T)} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^{\omega} \mathrm{d}\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^{\omega} \mathrm{d}\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to +\infty} \left(\int_{2+iK}^{2+i(K+T)} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^{\omega} \mathrm{d}\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{2-i(K+T)}^{2-iK} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^{\omega} \mathrm{d}\omega \right)。 \end{aligned} \tag{14}$$

由定理 1.1.5 的(iv) 可知,当 $\mathrm{Re}\omega = 2, \mathrm{Im}\,\omega = t, |t| \geqslant 1$ 时,

$$\Gamma(\omega) = O(|t|^{3/2} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}) = O(e^{-\frac{\pi}{3}|t|})。\tag{15}$$

因此,根据(14) 我们得

$$e^{-n/x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)\left(\frac{x}{n}\right)^{\omega}\mathrm{d}\omega + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{2} e^{-\frac{\pi}{3}K}\right)。$$

设 N 为正整数,ρ 为 $L(s,\chi)$ 的一个非平凡零点,且 $5/6 \leqslant \mathrm{Re}\rho = \sigma < 1$,则有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N} a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho}e^{-n/x}\\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)x^{\omega}\left(\sum_{n=1}^{N} a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho-\omega}\right)\mathrm{d}\omega\\ &\quad + O\left(x^2 e^{-\frac{\pi}{3}K}\sum_{n=1}^{K}|a(n)f_r(n)|n^{-2}\right)。\end{aligned}\tag{16}$$

因为

$$a(n) = \sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\xi_d, |\xi_d| \leqslant |\mu(d)| \leqslant 1, |f_r(n)| \leqslant (r,n) \leqslant r,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho-\omega} &= \sum_{d\leqslant z}\xi_d\left(\sum_{\substack{n=1\\ d\mid n}}^{N}\chi(n)f_r(n)n^{-\rho-\omega}\right)\\ &= \sum_{d\leqslant z}\xi_d\left(\sum_{\substack{n=1\\ d\mid n}}^{\infty}\chi(n)f_r(n)n^{-\rho-\omega} + O\left(\sum_{n>N} rn^{-2}\right)\right)\\ &= \sum_{d\leqslant z}\xi_d\chi(d)d^{-\rho-\omega}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)f_r(md)m^{-\rho-\omega}\right)\\ &+ O(rzN^{-1})。\end{aligned}\tag{17}$$

我们有

$$(r,md) = (r,d)\left(\frac{r}{(r,d)}, m\frac{d}{(r,d)}\right) = (r,d)\left(\frac{r}{(r,d)}, m\right)。$$

由于 $\mu(r) \neq 0$,所以 (r,d) 与 $\left(\frac{r}{(r,d)}, m\right)$ 互素。因为 $f(n)$ 是积性

函数,我们有

$$f_r(md) = f((r,md)) = f(r,d)f\left(\frac{r}{(r,d)},m\right)。$$

容易验证:$f\left(\frac{r}{(r,d)},m\right)$为$m$的积性函数。若令$k=\frac{r}{(r,d)}$,则有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)f_r(md)m^{-\rho-\omega} = f(r,d)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)f(m,k)m^{-\rho-\omega}\right)$$

$$= f(r,d)\prod_{p\mid k}\left(1+f(p)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\chi(p^l)p^{-l(\rho+\omega)}\right)\right)\times$$

$$\prod_{p\nmid k}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\chi(p^l)p^{-l(\rho+\omega)}\right) =$$

$$f_r(d)\prod_{p\mid k}\left(1+f(p)\cdot\frac{\chi(p)p^{-\rho-\omega}}{1-\chi(p)p^{-\rho-\omega}}\right)\times$$

$$\prod_{p\nmid k}\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-\rho-\omega}}\right)$$

$$= f_r(d)L(\rho+\omega,\chi)\prod_{p\mid k}(1+\chi(p)p^{-\rho-\omega}(f(p)-1))。\tag{18}$$

由(17)及(18)可得

$$\sum_{n=1}^{N}a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho-\omega}$$

$$= L(\rho+\omega,\chi)M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega)+O(rzN^{-1}),\tag{19}$$

这里

$$M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega) = \sum_{d\leqslant z}\xi_d\chi(d)f_r(d)d^{-\rho-\omega}$$

$$\cdot\prod_{p\mid\frac{r}{(r,d)}}(1+\chi(p)p^{-\rho-\omega}(f(p)-1))。$$

由(16)及(19),应用$|a(n)|\leqslant z$及$|f_r(n)|\leqslant r$估计(16)中的O项,并应用由(15)得到的估计

$$\int_{2-iK}^{2+iK}|\Gamma(\omega)|\,\mathrm{d}\omega = O\left(\int_{-1}^{1}|\Gamma(2+it)|\,\mathrm{d}t\right.$$

$$+\int_{1\leqslant|t|\leqslant K}|\Gamma(2+it)|\mathrm{d}t\Big)=O(1),$$

可得

$$\sum_{n=1}^{N}a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho}e^{-n/x}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)x^{\omega}L(\rho+\omega,\chi)M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$+O(x^2rze^{-\frac{\pi}{3}K})+O(x^2rzN^{-1})。\tag{20}$$

在(20)中,先令 $N\to\infty$,再令 $K\to\infty$,可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho}e^{-n/x}=$$

$$\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)L(\rho+\omega,\chi)x^{\omega}M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega)\mathrm{d}\omega\right)。\tag{21}$$

用 Δ 表示复 ω 平面上以 $\frac{1}{2}-\sigma-iK,2-iK,2+iK$ 和 $\frac{1}{2}-\sigma+iK$ 为顶点的矩形,并令

$$F(\omega)=\Gamma(\omega)L(\rho+\omega,\chi)x^{\omega}M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega)。$$

在 Δ 内部,$F(\omega)$ 的极点为 $\Gamma(\omega)$ 的1阶极点 $\omega=0$(见定理1.1.5的(ii)),以及当 $q=1,\chi(n)\equiv1(n\geqslant1)$ 时,$L(\rho+\omega,\chi)=\zeta(\rho+\omega)$ 的1阶极点 $\omega=1-\rho\neq0$。由残数定理我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iK}^{2+iK}F(\omega)\mathrm{d}\omega=L(\rho,\chi)M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,0)$$

$$+E_0\Gamma(1-\rho)x^{1-\rho}\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p})M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,1-\rho)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\int_{2-iK}^{\frac{1}{2}-\sigma-iK}F(\omega)\mathrm{d}\omega+\int_{\frac{1}{2}-\sigma-iK}^{\frac{1}{2}-\sigma+iK}F(\omega)\mathrm{d}\omega\\ \displaystyle+\int_{\frac{1}{2}-\sigma+iK}^{2+iK}F(\omega)\mathrm{d}\omega\end{array}\right)。\tag{22}$$

当 $|\mathrm{Im}\omega| = K > 1, \frac{1}{2} - \sigma \leqslant \mathrm{Re}\omega \leqslant 2$ 时，与(15)类似地，应用定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma(\omega) = O(e^{-\frac{\pi}{3}K})。$$

由于 $\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}(\rho + \omega) \leqslant 2 + \sigma \leqslant 3$，由定理 1.3.6 的(i) 与(ii) 可得

$$L(\rho + \omega, \chi) = O((qK)^{1/4}\log(qK))。$$

并且，在 $\mathrm{Re}(\rho + \omega) \geqslant \frac{1}{2}$ 时，由 $\mu(r) \neq 0$ 可得

$$\begin{aligned} |M((\xi_d),\chi,f,r,\rho,\omega)| &\leqslant \sum_{d \leqslant z} |f_r(d)|\, d^{-1/2} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} (1 + p^{-1/2}(1 + p)) \\ &\leqslant \sum_{d \leqslant z} |f_r(d)|\, d^{-1/2} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} (1 + 2p^{1/2}) \\ &\ll \sum_{d \leqslant z} (r,d)\, d^{-1/2} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} p \\ &= \sum_{d \leqslant z} r d^{-1/2} \ll r z^{1/2}。 \end{aligned} \tag{23}$$

所以，当 $|\mathrm{Im}\omega| = K, \frac{1}{2} - \sigma \leqslant \mathrm{Re}\omega \leqslant 2$ 时，

$$F(\omega) = O(x^2 e^{-\frac{\pi}{3}K} r (qzK)^{1/2}\log(qK))。$$

由此可知

$$\lim_{K \to +\infty}\left(\int_{\frac{1}{2}-\sigma+iK}^{2-iK} F(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{\frac{1}{2}-\sigma+iK}^{2+iK} F(\omega)\mathrm{d}\omega\right) = 0。 \tag{24}$$

当 $|t| \leqslant 1$ 时，由于 $\frac{5}{6} \leqslant \mathrm{Re}\rho = \sigma \leqslant 1$，所以 $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} - \sigma \leqslant -\frac{1}{3}$，因此由定理 1.1.5 的(i) 及(ii) 可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) = O\left(\left|\Gamma\left(\frac{3}{2} - \sigma + it\right)\right|\right)$$

$$= O\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right) = O(1), \tag{25}$$

而当 $|t| > 1$ 时，则由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) = O\left(|t|^{-\sigma} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right)。 \tag{26}$$

由定理 1.3.6 的(i) 及(ii) 可得

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = O((q(|t| + 2))^{1/4} \log(q(|t| + 2)))。 \tag{27}$$

由(23)，(25) ~ (27)，我们有

$$F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) = \begin{cases} O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} q^{1/4} \log(2q)), & \text{若} |t| \leqslant 1, \\ O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} q^{1/4} \log q), & \text{若} 1 < |t| \leqslant K。 \end{cases}$$

所以

$$\int_{\frac{1}{2}-\sigma-iK}^{\frac{1}{2}-\sigma+iK} F(\omega)\mathrm{d}\omega = i\int_{-1}^{1} F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right)\mathrm{d}t$$

$$+ i\int_{1}^{K} F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right)\mathrm{d}t + i\int_{-K}^{-1} F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right)\mathrm{d}t$$

$$= O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} q^{1/4} \log(2q))。 \tag{28}$$

由(21)，(22)，(24) 及(28)，注意到 $L(\rho, \chi) = 0$，我们得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x}$$

$$= E_0 \Gamma(1 - \rho) x^{1-\rho} \frac{\varphi(q)}{q} \cdot M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, 1 - \rho)$$

$$+ O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} q^{1/4} \log(2q))。$$

由于 $a(1) = 1$，以及

$$\sum_{n>y} |a(n)\chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x}| \leqslant \sum_{n>y} \tau(n)(r,n) n^{-5/6} e^{-n/x}$$

$$\ll r \sum_{n>y} e^{-n/x}$$

$$\ll r\left(e^{-(\log x)^2} + \sum_{n \geqslant [y]+2} \int_{n-1}^{n} e^{-u/x}\mathrm{d}u\right)$$

$$\ll r\left(e^{-(\log x)^2} + \int_y^{\infty} e^{-u/x}\mathrm{d}u\right)$$
$$= O(rxe^{-(\log x)^2}) = O(x^{-1}),$$

可知定理 2.2.2 成立。**证毕**。

练　　习

（Ⅰ）证明在定理2.2.1的(ii)中,若 f 处处连续,在点 x 处不可导,但(这里积分为瑕积分)

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\right|\mathrm{d}y = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0-}\int_{\delta}^{0}\left|\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\right|\mathrm{d}y = 0,$$

则(ii)的结论仍成立。特别地,若 f 在点 x 处的左、右导数存在,则(ii)成立。考虑 $f(0)=0, f(u)=u+1(u\neq 0$ 时)的情况,说明 f 在点 x 处若不连续,则(ii)不成立。

（Ⅱ）若在(21)、(22)中,应用残数定理及 § 1.3 的练习(Ⅲ),将积分由直线 $\mathrm{Re}\omega = 2$ 移至 $\mathrm{Re}\omega = -1/3-\sigma$,并注意到 -1 为 $\Gamma(\omega)$ 的极点,证明定理 2.2.2 中的 O 项可换成

$$O((q^{5/6}x^{-1/3-\sigma}(zr)^{4/3}$$
$$+(rz)^{2-\sigma}x^{-1}(q(|t|+2))^{3/2-\sigma})(\tau(r))^2(\log 2qr)),$$

这里 $\tau(r)$ 为除数函数。

§ 2.3　若干数论函数的求和

我们可在较一般的情况下,阐述如何用 § 1.6 中解析的方法研究求和

$$\sum_{n<x} a_n$$

的渐近公式或者估计，这里 a_n 通常为实的积性函数，而对于 x 则可先假设 $x = [x] + \frac{1}{2}, x \geqslant 3$（$[x]$ 为不超过 x 的最大自然数）。我们的出发点是引理 1.6.2。设当 $a > 1$ 时 $\Delta(a) = 1$，否则 $\Delta(a) = 0$。则由引理 1.6.2，我们有

$$\sum_{n<x} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n \Delta\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{1}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^s}{s}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right)\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^b}{T}\sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n|}{n^b\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right),$$

其中 $b > 0$，T 是适当选取的正数，$3 \leqslant T \leqslant x\log x$，$N$ 是任意大于 x 的正整数，b 的选取使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b} < +\infty。$$

因此，我们有

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\left(\int_{-T}^{T}\frac{x^b\mathrm{d}t}{b+|t|}\right)\left(\sum_{n>N}|a_n|n^{-b}\right)\right)$$
$$+ O\left(\frac{x^b}{T}\sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n|}{n^b\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right),$$

其中 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ 被称为 a_n 的“生成函数”。在上式中令 $N \to \infty$ 就得到

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^b}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right)。$$

进一步，若设当 $\frac{x}{2} \leqslant n \leqslant 2x$ 时 $a_n = O(f(x))$，则由在推导 §1.6

的(7) 时已证过的估计

$$\sum_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant 2x}\frac{1}{\left|\log\frac{x}{n}\right|}\ll x\log x,$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b\left|\log\frac{x}{n}\right|}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}+f(x)x^{1-b}\log x。$$

因此

$$\sum_{n<x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^b}{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}\right)\right)$$
$$+O\left(\frac{f(x)x\log x}{T}\right)。\tag{1}$$

这个公式在有的书中被称为“Perron 公式”。在具体应用中，通过使用引理1.3.1，$F(s)$ 常常可表示为含有 $\zeta(s)$ 或 $\zeta'(s)$ 等熟知函数的乘积，所以 $F(s)$ 可被解析开拓，成为$\{s\mid\mathrm{Re}s>\sigma-\varepsilon\}$($\sigma$ 为某一指定实数，而 ε 为充分小正数) 中的亚纯函数。相应地，函数

$$G(s)=F(s)\frac{x^s}{s}$$

也可被适当地解析开拓。但要注意，$s=0$ 或为 $G(s)$ 的极点，或为 $G(s)$ 的可去奇点。若$\lim\limits_{s\to 0}F(s)=0$，则0通常为 $G(s)$ 的可去奇点，否则为极点。于是，我们通常会应用残数定理。用 A、B、C 和 D 分别记复 s 平面上的点 $b+iT$、$\sigma+iT$、$\sigma-iT$ 与 $b-iT$。对于以 A、B、C 和 D 为顶点的矩形区域 Δ，应用残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}G(s)\mathrm{d}s=E+\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3),\tag{2}$$

其中 E 为解析开拓之后的 $G(s)$ 在 Δ 中的极点所对应的残数之和，I_1，I_2 和 I_3 分别为 $G(s)$ 沿直线段$\overline{DC}$、$\overline{CB}$ 和$\overline{BA}$ 的积分，这里 $\overline{DC}$ 表示由 D 至 C 的直线段，以此类推(解析开拓后的 $G(s)$ 仍记为“$G(s)$”)。因此，如果我们能将 $F(s)$ 解析开拓，成为$\{s\mid\mathrm{Re}s>$

$\sigma-\varepsilon\}$ 中的亚纯函数,并知道 $F(s)$ 在区域 Δ 中的极点,以及 $F(s)$ 在 $|\mathrm{Im}(s)|=T,\sigma\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant b$ 和 $|\mathrm{Im}s|\leqslant T,\mathrm{Re}s=\sigma$ 时的估计,就可以求得 $\sum\limits_{n\leqslant x}a_n$ 的渐近公式或估阶。

在实际问题中,我们常需要估计 $\left|\dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right|$ 及 $\left|\dfrac{1}{\zeta(z)}\right|$ 的上界。

引理 2.3.1　设 $T\geqslant 3,c=\dfrac{1}{3}c_{16},c_{16}$ 为定理 1.5.8 中的常数,则

(i) 当 $z=\beta+it,|t|\leqslant T,\beta\geqslant 1-\dfrac{c}{\log(T+2)},z\neq 1$ 时

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\frac{1}{z-1}+O((\log T)^2)。$$

(ii) 当 $z=\beta+it,|t|\leqslant T_1=\exp(\sqrt{\log T}),\beta\geqslant 1-\dfrac{c}{\log(T+2)},z\neq 1$ 时

$$\frac{1}{\zeta(z)}=O(\log T)。$$

证明:(i) 由定理 1.5.8,当 $z=\beta+it,|t|\leqslant T$,且

$$1-\beta\leqslant\frac{2c}{\log(T+2)}$$

时,$\zeta(z)\neq 0$。设

$$\sigma=1-\frac{c}{\log(T+2)}。$$

则当 $z=\beta+it,z\neq 1,\sigma\leqslant\beta\leqslant 1+\dfrac{1}{\log x}$ 及 $|t|\leqslant T$ 时,由定理 1.5.14 的(v) 可得

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\frac{1}{z-1}+\sum_{|r_n-t|<1}\frac{1}{z-\rho_n}+O(\log T),$$

其中求和通过 $\zeta(s)$ 所有满足 $|r_n-t|<1$ 的非平凡零点 $\rho_n=\beta_n+ir_n$。由于 $\beta\geqslant\sigma\geqslant\dfrac{c}{\log(T+2)}+\beta_n$,我们有

$$\frac{1}{z-\rho_n}=O\left(\frac{1}{\beta-\beta_n}\right)=O(\log(T+2))。$$

又，由定理 1.5.14 的(i) 可得

$$\sum_{|r_n-t|<1}1\leqslant 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+(r_n-t)^2}\ll\log(|t|+2)\leqslant\log(T+2)。(3)$$

所以

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\frac{1}{z-1}+O((\log T)^2)。$$

(ii) 分两种情况。

(a) $T_1\geqslant|t|\geqslant 1$。令

$$\sigma_0=1-\frac{c}{\log(T+2)},$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{\log(T+2)},$$

$$\sigma_2=1-\frac{3c}{2\log(T+2)}。$$

由定理 1.5.8，当$|t|\leqslant T_1$且

$$\beta\geqslant 1-\frac{2c}{\log(T_1+2)}$$

时，$\zeta(\beta+it)\neq 0$。所以，当$1\leqslant|t|\leqslant T_1$，$t$ 固定，且 $\sigma_2\leqslant u\leqslant\sigma_1$ 时，作为 u 的函数$\dfrac{\zeta'(u+it)}{\zeta(u+it)}$是连续的。令

$$H(v)=\zeta(v+it)e^{-\delta(v)},\delta(v)=\int_{\sigma_1}^{v}\frac{\zeta'(u+it)}{\zeta(u+it)}\mathrm{d}u,$$

其中 $\sigma_2\leqslant v\leqslant\sigma_1$，积分是沿从 σ_1 至 v 的直线段取的。$\delta(v)$ 在$[\sigma_2,\sigma_1]$上可导，且

$$\delta'(v)=\frac{\zeta'(v+it)}{\zeta(v+it)}。$$

由此可知，对于 $v\in[\sigma_2,\sigma_1]$，

$$H'(v)=\zeta'(v+it)e^{-\delta(v)}-\zeta(v+it)e^{-\delta(v)}\cdot\delta'(v)=0。$$

因此，$H(v)$ 在 $v \in [\sigma_0, \sigma_1]$ 上为常数，于是

$$\zeta(v+it)e^{-\delta(v)} = \zeta(\sigma_1+it)e^{-\delta(\sigma_1)} = \zeta(\sigma_1+it),$$

$$\left|\frac{1}{\zeta(v+it)}\right| = \left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1+it)}\right| e^{-\mathrm{Re}(\delta(v))}。\tag{4}$$

我们有

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1+it)}\right| = \prod_p |1-p^{-\sigma_1-it}| \leqslant \prod_p (1+p^{-\sigma_1}) \leqslant \zeta(\sigma_1),$$

因此，由定理 1.3.6 的(ii) 可知

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1+it)}\right| = O(\log T)。\tag{5}$$

当 $v \in [\sigma_0, \sigma_1]$ 时，由定理 1.5.14 的(v) 可得

$$\begin{aligned}\delta(v) &= \int_{\sigma_1}^{v}\left(-\frac{1}{u+it-1} + \sum_{|t-r_n|<1}\frac{1}{u+it-\rho_n} + O(\log(|t|+2))\right)\mathrm{d}u \\ &= O\left(\frac{1}{\log T}\right) + O\left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\sum_{|t-r_n|<1}\frac{1}{u-\beta_n}\right)\mathrm{d}u\right)。\end{aligned}\tag{6}$$

由于

$$\begin{aligned}u-\beta_n \geqslant \sigma_0-\beta_n &= 1-\frac{c}{\log(T+2)}-\beta_n \\ &\geqslant \frac{2c}{\log(T_1+2)}-\frac{c}{\log(T+2)} \\ &\geqslant \frac{c}{\log(T_1+2)},\end{aligned}$$

并且可与(3) 式类似地得

$$\sum_{|r_n-t|<1} 1 \ll \log(|t|+2) \ll \log(T_1+2),$$

所以由(6) 式可得

$$\delta(v) = O(1)。\tag{7}$$

由(4)、(5) 及(7)，可得所需的估计。

(b) $|t| < 1$。由引理 1.5.9 可知，当 $s = \sigma + ir, |r| \leqslant \sqrt{5}$ 时，$\zeta(s) \neq 0$。令

$$G(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\zeta(s)}, & \text{若 } s=\sigma+ir\neq 1, 0\leqslant\sigma\leqslant 1, |r|\leqslant 2,\\ 0, & \text{若 } z=1。\end{cases}$$

若 z_0 属于有界闭集 $D=\{s\,|\,s=\sigma+ir, 0\leqslant\sigma\leqslant 1, |r|\leqslant 2\}$，且 $z_0\neq 1$，则由于 $\zeta(s)$ 在 D 中连续且不为零，容易知道 $G(s)$ 在 z_0 处连续。若 $z_0=1$，则由于(应用定理 1.3.5 的(ii))

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}=0,$$

可知 $G(s)$ 在 0 处也连续。于是，$G(s)$ 在有界闭集 D 上连续。因此我们有

$$G(s)=O(1)。$$

特别地，由此可知 $\dfrac{1}{\zeta(z)}=O(1)$。

综合(a)、(b)，可知(ii) 成立。引理 2.3.1 **证毕**。

用初等的方法和上述解析的方法，我们可证明：

引理 2.3.2　设 $x\geqslant 1, x_1=3x, a=-1/3, r$ 为正整数，

$$\tau_a(r)=\prod_{p\mid r}(1-p^a)^{-1},$$

δ 代表某个正的绝对常数(每次出现未必相同)。我们有

(i) $$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,r)=1}}\mu(n)n^{-1}\log n=-\frac{r}{\varphi(r)}+O((\tau_a(r))^2e^{-\delta\sqrt{\log x_1}}),$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数，即 $\mu(1)=1$，当 $n=p_1\cdots p_t, p_1,\cdots,p_t$ 为互不相同素数时 $\mu(n)=(-1)^r$，否则 $\mu(n)=0$。

(ii) 设 ε 为任意的正的常数，则

$$\tau_a(r)\ll\tau(r)\ll r^{\varepsilon},$$

其中 $\tau(r)$ 为通常的除数函数。

(iii) 设 $k\geqslant 1, k$ 为常数，则

$$\sum_{n\leqslant x}(\tau_a(n))^k=\lambda x+O(x^{13/18+\varepsilon}),$$

其中

$$\lambda = \prod_{p} (1 - p^{-1} + p^{-1}(1 - p^{a})^{k})。$$

(iv) $\sum\limits_{\substack{n \leqslant x \\ (n,r)=1}} \mu(n) n^{-1} = O(\tau_a(r) e^{-\delta\sqrt{\log x_1}})$。

(v) $\sum\limits_{\substack{n \leqslant x \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)}{k(n)} \log n = -\zeta(2) \prod\limits_{p \mid r} (1 + \frac{1}{p}) + O((\tau_a(r))^2 e^{-\delta\sqrt{\log x_1}})$,

其中 $k(n) = n \prod\limits_{p \mid n} (1 + \frac{1}{p})$。

(vi) $\sum\limits_{\substack{(n,r)=1 \\ n \leqslant x}} \frac{\mu(n)}{k(n)} = O(\tau_a(r) e^{-\delta\sqrt{\log x_1}})$,

这里 $k(n) = n \prod\limits_{p \mid n} (1 + \frac{1}{p})$。

(vii) $\sum\limits_{n \leqslant x} \mu(n) = O(x e^{-\delta\sqrt{\log x_1}})$。

(viii) $\sum\limits_{n \leqslant x} \frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)} = \log x + \alpha + O(x^{-2/5+\varepsilon})$,

其中 ε 为任给充分小正数,而

$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\rho_n (1 - \rho_n)},$$

这里求和通过 $\zeta(s)$ 所有非平凡零点。

(ix) $\sum\limits_{\substack{n \leqslant x \\ (n,r)=1}} |\mu(n)| = \frac{x}{\zeta(2)} \prod\limits_{p \mid r} (1 + \frac{1}{p})^{-1}$

$$+ O(x^{3/5} \tau_a(r) (\log x_1)^3)。$$

(x) 设 $y = \max(y_1, y_2), y_1 > 1, y_2 > 1, x \geqslant y$,则

$$\sum_{\substack{y < n \leqslant x \\ (n,r)=1}} |\mu(n)| \left(\log \frac{n}{y_1}\right) \left(\log \frac{n}{y_2}\right)$$

$$= \frac{x}{\zeta(2)} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(\left(\log \frac{x}{y_1} - 1\right)\left(\log \frac{x}{y_2} - 1\right) + 1 \right)$$

$$+ \frac{y}{\zeta(2)} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(\log \frac{y^2}{y_1 y_2} - 2 \right)$$

$$+ O\left(x^{3/5} \tau_a(r) \log \frac{2x}{y_1} \log \frac{2x}{y_2} (\log x_1)^3 \right)。$$

(xi) $\sum_{n \leqslant x} (\Lambda(n))^2 = x \log x - x + O(x e^{-\delta \sqrt{\log x_1}})$。

(xii) $\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$,

其中 γ 为一个常数(通常称为 Euler 常数)。

(xiii) 设 r 及 s 为正数,$r \geqslant 1, s > 1$,则

$$\sum_{n \leqslant x} n^{-1} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n} \right)^{-s} \ll 1,$$

其中记号 $\ll$ 所蕴含的常数与 r 及 s 有关。

(xiv) 设 $r \geqslant 1, s \geqslant 0$,则

$$\sum_{n \leqslant x} (\tau_a(n))^r (\log 2n)^{-s} \ll x (\log x_1)^{-s}。$$

(xv) 设 $r \geqslant 1, 0 < \alpha \leqslant 1, s \geqslant 0$,则

$$\sum_{n \leqslant x} n^{-\alpha} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n} \right)^s \ll \begin{cases} x^{1-\alpha}, & 若 0 < \alpha < 1, \\ (\log x_1)^{s+1}, & 若 \alpha = 1。 \end{cases}$$

(xvi) $$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,r)=1}} \frac{|\mu(n)|}{n} = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(\log x + \prod_{p \mid r} \frac{\log p}{p+1} + c_1 \right)$$

$$+ O(x^{-2/5} \tau_a(r) (\log x_1)^3),$$

其中

$$c_1 = -\frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\rho_n (1 - \rho_n)} + A,$$

求和通过 $\zeta(s)$ 所有的非平凡零点,A 为推论 1.4.9 中的常数。

证明: 显然,我们可设 $x \geqslant 3$,因为否则所有结果都平凡地成立。并且,我们无妨假设 $x = [x] + \frac{1}{2}$,因为否则我们将以 $[x] + \frac{1}{2}$ 代替 x 去研究每个求和,而所带来的误差对所需得到的最后的余项来说总是允许的。我们总采用本节开头的阐述中所用的一些记号。

(i) 当 $n \geqslant 1, (n, r) = 1$ 时,令 $a_n = \mu(n) n^{-1} \log n$,否则令 $a_n = 0$。令

$$b = \frac{1}{\log x}, T = \exp(\sqrt{\log x}), f(x) = x^{-1} \log x。$$

则相应于(1),当 $\mathrm{Re} s = b$ 时,我们有(用到引理 1.3.1),

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n^{1+s}} = -\left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{1+s}} \right)_s' \\ &= -\left(\prod_{p \nmid r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right) \right)_s' \\ &= -\left(\frac{1}{\zeta(s+1)} \prod_{p \mid r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{-1} \right)_s' \\ &= \frac{\zeta'(1+s)}{(\zeta(1+s))^2} \prod_{p \mid r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{\zeta(1+s)} \left(\prod_{p \mid r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{-1} \right) \left(\sum_{p \mid r} \frac{\log p}{p^{s+1} - 1} \right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O\left(\frac{1}{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \right) \right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T} (\log x)^2 \right)。 \end{aligned} \tag{9}$$

由引理 2.3.1 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+b}} = -\zeta'(1+b)$$

$$= -\frac{\zeta'(1+b)}{\zeta(1+b)}\cdot\zeta(1+b) = O((\log x)^2)。 \tag{10}$$

令 $\sigma = -\frac{c}{2\log(3x+2)}$，$c$ 为引理 2.3.1 中的常数。由定理 1.3.5 的 (ii) 及定理 1.5.8 可知，函数

$$G(s) = \frac{x^s}{s}F(s)$$

在以点 $A = b + iT, B = \sigma + iT, C = \sigma - iT$ 和 $D = b - iT$ 为顶点的矩形中的仅以 $s = 0$ 为 1 阶极点，且相应的残数为

$$\lim_{s\to 0}(s\cdot G(s)) = \lim_{s\to 0}\Big[\frac{1}{s\cdot\zeta(1+s)}\cdot s\cdot\frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)}\prod_{p\mid r}\Big(1-\frac{1}{p^{s+1}}\Big)^{-1}$$

$$+ s\cdot\frac{1}{s\cdot\zeta(1+s)}\Big(\prod_{p\mid r}\Big(1-\frac{1}{p^{1+s}}\Big)^{-1}\Big)\Big(\sum_{p\mid r}\frac{\log p}{p^{s+1}-1}\Big)\Big]$$

$$= -\prod_{p\mid r}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} = -\frac{r}{\varphi(r)}。$$

因此，相应于(2)，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}G(s)\mathrm{d}s = -\frac{r}{\varphi(r)} + \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3), \tag{11}$$

其中，I_1, I_2, I_3 分别为 $G(s)$ 沿着三条直线段 $\overline{DC}$，$\overline{CB}$ 与 $\overline{BA}$ 所作的积分。当

$$\sigma \leqslant \mathrm{Re}s = u \leqslant b, |\mathrm{Im}s| = T, \text{或 } \mathrm{Re}s = \sigma, |\mathrm{Im}s| \leqslant T,$$

且 x 充分大时，由引理 2.3.1 以及

$$\left|\prod_{p\mid r}\Big(1-\frac{1}{p^{s+1}}\Big)^{-1}\right| \leqslant \prod_{p\mid r}\Big(1-\frac{1}{p^{1+\sigma}}\Big)^{-1} \leqslant \tau_a(r),$$

$$\left|\prod_{p\mid r}\frac{\log p}{p^{s+1}-1}\right| \leqslant \sum_{p\mid r}\frac{\log p}{p^{\sigma+1}-1} \ll \sum_{p\mid r}p^a \leqslant \tau_a(r),$$

根据(8)可得

$$F(s) = O((\log x)^2\cdot\tau_a(r)) + O((\log x)^2\cdot(\tau_a(r))^2)$$

$$= O((\tau_a(r))^2(\log x)^2)。$$

所以

$$I_1, I_3 = O\left((\tau_a(r))^2 (\log x)^2 \frac{b - \sigma}{T} \right) = O((\tau_a(r))^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log (3x)}}),$$

$$I_2 = O\left(\int_{-T}^{T} \frac{x^\sigma}{|t| + b} (\tau_a(r))^2 (\log x)^2 \mathrm{d}t \right)$$

$$= O((\tau_a(r))^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log (3x)}})。$$

因此,由(9)、(10) 以及(11),可得(i)。

(ii) 分三个步骤。

(a) 由于当 $p > 7$ 时,$1 - p^a \geqslant \frac{1}{2}$,所以

$$\tau_a(r) = \prod_{p \mid r} (1 - p^a)^{-1} \ll \prod_{p \mid r} 2 \ll \tau(r)。$$

(b) 当 $x \geqslant 1$ 时,令

$$f(x) = \frac{1}{x}\log(1 + x), g(x) = \frac{x}{1 + x} - \log(1 + x)。$$

由于

$$g'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} - \frac{1}{1 + x} < 0,$$

所以 $g(x)$ 为单调下降的,$g(x) \leqslant g(1) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$。由于

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 + x} \cdot x - \log(1 + x) \right) = \frac{1}{x^2} g(x) < 0,$$

所以 $f(x)$ 为单调下降的,$f(x) \leqslant f(1) = \log 2$。因此

$$(1 + x)^{1/x} \leqslant 2, 若\ x \geqslant 1。$$

(c) 无妨设 $\varepsilon < \frac{1}{\log 2}$。设 r 的标准素因子分解式为 $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$,其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$,$p_1, \cdots, p_k$ 均为素数。则

$$\frac{\tau(r)}{r^\varepsilon} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{1 + x_i}{p_i^{\varepsilon x_i}} \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant k}{}^{*} \frac{1 + x_i}{p_i^{\varepsilon x_i}},$$

这里 $*$ 表示 $1 + x_i \geqslant p_i^{\varepsilon x_i}$。但若 p_i 满足这个不等式,则由(ii) 可知

$$p_i \leqslant ((1+x_i)^{1/x_i})^{1/\varepsilon} \leqslant 2^{1/\varepsilon},$$

因此在乘积 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant k}^{*}$ 中,至多有 $\leqslant 2^{1/\varepsilon}$ 项。因此,由于

$$p_i^{\varepsilon x_i} \geqslant 2^{\varepsilon x_i} = e^{\varepsilon x_i \log 2} \geqslant 1 + \varepsilon x_i \log 2 \geqslant (1+x_i)\varepsilon \log 2,$$

我们得

$$\frac{\tau(r)}{r^{\varepsilon}} \leqslant (\varepsilon \log 2)^{-\varepsilon_1}, \varepsilon_1 = 2^{1/\varepsilon}。$$

(ii) 证毕。

(iii) 令 $a_n = (\tau_a(n))^k, b = 1 + \frac{1}{\log x}, T = x^{1/3-\varepsilon^2}, f(x) = x^{\varepsilon^2}$, ε 为任一给定正数。当 $\mathrm{Re}s = b$ 时,由于 $\tau_a(n)$ 为积性函数,由 (ii) 及引理 1.3.1 可得

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau_a(n))^k}{n^s} = \prod_p \left(1 + (1-p^a)^{-k}\left(\sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms}\right)\right) \\ &= \prod_p (1 + (1-p^a)^{-k} p^{-s}(1-p^{-s})^{-1}) \\ &= \zeta(s) \prod_p (1 + p^{-s}(1-p^a)^{-k} - p^{-s}) \\ &= \zeta(s) K(s), \end{aligned}$$

这里 $K(s)$ 当 $\mathrm{Re}s > 1 + a = \frac{2}{3}$ 时是绝对收敛的。因此,应用(ii),相应于(1) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant x} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O(x^{2/3+\varepsilon}) \\ &\quad + O\left(\frac{x}{T}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-b}\right)。 \end{aligned} \tag{12}$$

由定理 1.3.6 的(ii),我们看到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-b} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_a(n))^k n^{-b} = \zeta(b)K(b) \ll \zeta(b) \\ &= O(\log x)。 \end{aligned} \tag{13}$$

令 $\sigma=\frac{2}{3}+\varepsilon^2$。函数 $G(s)=F(s)\frac{x^s}{s}$ 在以 $A=b+iT$，$B=\sigma+iT$，$C=\sigma-iT$ 和 $D=b-iT$ 为顶点的矩形区域中仅以 $s=1$ 为极点，残数为

$$\lim_{s\to1}\left((s-1)\frac{x^s}{s}F(s)\right)=x\cdot K(1)。$$

因此，与(2)和(11)类似地有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}G(s)\mathrm{d}s=K(1)x+\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3),\tag{14}$$

其中 I_1，I_2 与 I_3 分别为 $G(s)$ 沿着直线段 $\overline{DC}$，$\overline{CB}$ 与 $\overline{BA}$ 所做的积分。当 $s=\beta+it$，$5/6\leqslant\beta\leqslant1$，$|t|=T$，或 $\beta=5/6$，$|t|\leqslant T$ 时，由定理 1.3.6 的(ii)可知

$$\zeta(s)=O((|t|+2)^{\frac{1-\beta}{2}}\log(|t|+2)),$$

且当 $1\leqslant\beta\leqslant b=1+\frac{1}{\log x}$，$|t|=T$ 时，$\zeta(s)=O(\log T)$。因此

$$I_1,I_3=O\left(\frac{x}{T}\cdot T^{\frac{1-\sigma}{2}}\log T\right)=O(x^{13/18+\varepsilon}),$$

$$\begin{aligned}I_2&=O\left(x^\sigma\int_{-T}^{T}(|t|+2)^{-\frac{\sigma+1}{2}}(\log(|t|+2))\mathrm{d}t\right)\\&=O(x^\sigma T^{\frac{1-\sigma}{2}}\log x)=O(x^{13/18+\varepsilon})。\end{aligned}$$

由(12)、(13)及(14)可得(iii)。

(iv)可与(i)类似地证明。这里从略。

(v)由于

$$(k(n))^{-1}=n^{-1}\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}=n^{-1}\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{k(d)},$$

应用(i)及(iii)我们得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,r)=1}}\frac{\mu(n)\log n}{k(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,r)=1}}\frac{\mu(n)}{n}\left(\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{k(d)}\right)\log n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{dk(d)}\Big(\sum_{\substack{m\leqslant x/d\\(m,rd)=1}} \frac{\mu(m)}{m}(\log(md))\Big)\\
&= \sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{dk(d)}\Big(\log d\cdot \sum_{\substack{m\leqslant x/d\\(m,rd)=1}} \frac{\mu(m)}{m} + \sum_{\substack{m\leqslant x/d\\(m,rd)=1}} \frac{\mu(m)}{m}\log m\Big)\\
&= \sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d\cdot k(d)}\Big(-\frac{rd}{\varphi(rd)} + O((\tau_a(rd))^2\log(2d)e^{-\delta\sqrt{\log(3x/d)}})\Big)\\
&= -\frac{r}{\varphi(r)}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{k(d)\varphi(d)}\Big) +\\
&+ O\Big(\sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d\cdot k(d)}\log(2d)(\tau_a(d))^2e^{-\delta\sqrt{\log(3x/d)}}\Big)(\tau_a(r))^2。
\end{aligned}
\tag{15}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{k(d)\varphi(d)} &= \sum_{\substack{d=1\\(d,r)=1}}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{k(d)\varphi(d)} + O\Big(\sum_{d>x} d^{-2}\Big)\\
&= \prod_{p\nmid r}\Big(1+\frac{1}{p^2-1}\Big) + O(x^{-1})\\
&= \zeta(2)\prod_{p\mid r}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big) + O(x^{-1}),
\end{aligned}
$$

且通过将求和范围分拆成 $d\leqslant\sqrt{x}$ 与 $d>\sqrt{x}$，可得(注意到(ii))

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d\leqslant x\\(d,r)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d\cdot k(d)}\log(2d)(\tau_a(d))^2e^{-\delta\sqrt{\log(3x/d)}}\\
&= O\Big(\Big(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d\cdot k(d)}\log(2d)(\tau_a(d))^2\Big)e^{-\delta\sqrt{\log(3x^{1/2})}}\Big) +\\
&+ O\Big(x^{-1/4}\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^{1/2}k(d)}\log(2d)\cdot(\tau_a(d))^2\Big)\\
&= O(e^{-\delta\sqrt{\log(3x^{1/2})}})。
\end{aligned}
$$

由(15)可知(v)得证。

(vi) 应用(iv),可与(v)类似地证明。这里从略。

(vii) 可与(i)及(iv)类似地证明。这里从略。

(viii) 当 $\mathrm{Re}s>0$ 时,由引理 1.3.1 可得

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)n^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s(p-1)}\right)$$
$$=\zeta(s+1)\prod_p\left(1+\frac{p^s-1}{p^{2s+1}(p-1)}\right)$$
$$=\zeta(s+1)K(s),$$

这里 $K(s)$ 当 $\mathrm{Re}s>-\frac{1}{2}$ 时是绝对收敛的,且 $K(0)=1$。设 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$。令

$$b=\frac{1}{\log x},\sigma=-\frac{1}{2}+\varepsilon,f(x)=x^{-1+\varepsilon/2},T=x^{-4\sigma/5}。$$

由(ii),我们知道

$$\varphi(n)=n\prod_{p\mid n}(1-\frac{1}{p})\gg n(\prod_{p\mid n}2)^{-1}\gg n(\tau(n))^{-1}\gg n^{1-\varepsilon/2},$$

因此,由(1)及(2)可得

$$\sum_{n<x}\frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)}=E+O(x^{-2/5+\varepsilon})+O\left(\frac{1}{T}\zeta(1+b)K(b)\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3),\tag{16}$$

其中 E 为函数 $G(s)=\frac{x^s}{s}F(s)$ 在 $s=0$ 处的残数,I_1,I_2 及 I_3 分别为 $G(s)$ 沿直线段 $\overline{DC},\overline{CB}$ 与 $\overline{BA}$ 所作的积分,点 A,B,C,D 由 σ, b 及 T 定义如前。$s=0$ 为 $G(s)$ 的 2 阶零点。由定理 1.3.5 的(ii)及推论 1.4.9,可得

$$E=\lim_{s\to0}(s^2G(s))'_s=\lim_{s\to0}(sx^s\cdot\zeta(1+s)K(s))'_s$$
$$=\lim_{s\to0}\left[\left(\log x+\frac{1}{s}+\frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)}+\frac{K'(s)}{K(s)}\right)sx^s\zeta(1+s)K(s)\right]$$

$$= \left(\lim_{s\to 0}\left(\log x + \frac{1}{s} + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \frac{K'(s)}{K(s)}\right)\right)\left(\lim_{s\to 0}(sx^{s}\zeta(1+s)K(s))\right)$$
$$= (\log x + \alpha)K(0) = \log x + \alpha; \tag{17}$$

其中 $\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log\pi + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\rho_n(1-\rho_n)}$,求和通过 $\zeta(s)$ 所有非平凡零点。由定理 1.3.6 的(ii) 可得估计

$$\zeta(1+b)K(b) = O(\zeta(1+b)) = O(\log x), \tag{18}$$

$$I_1 = O\left(\int_{-T}^{T}\frac{x^{\sigma}}{|t|+2}(|t|+2)^{-\sigma/2}\log(|t|+2)\mathrm{d}t\right)$$
$$= O(x^{\sigma}T^{-\sigma/2}\log T) = O(x^{-2/5+\varepsilon}),$$

$$I_2, I_3 = O\left(\frac{1}{T}\left(\int_{\sigma}^{0}x^{u}\cdot T^{-u/2}\log T\mathrm{d}u + \int_{0}^{b}x^{u}\log x\mathrm{d}u\right)\right)$$
$$= O(T^{-1}\log T) = O(x^{-2/5+\varepsilon})。$$

因此,由(16) ~ (18) 可得所需结果。

(ix) 由于当 $\mathrm{Re}s > 1$ 时,由引理 1.3.1 可得

$$F(s) = \sum_{\substack{n=1\\(n,r)=1}}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^{s}} = \prod_{p\nmid r}\left(1+\frac{1}{p^{s}}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\prod_{p\mid r}\left(1+\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1},$$

令 c 为引理 2.3.1 中的常数,

$$b = 1 + \frac{1}{\log x}, T = x^{2/5}, \sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{(\log T)^{3}}, f(x) = 1,$$

则由(1),(2),及 $\zeta(b) = O(\log x)$,可得

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,r)=1}}|\mu(n)| = E + O\left(\frac{x\log x}{T}\right) + \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3), \tag{19}$$

其中 E 为函数 $G(s) = \frac{x^{s}}{s}F(s)$ 在 $s = 1$ 处的残数,

$$E = \lim_{s\to 1}\left((s-1)\frac{1}{s}x^{s}F(s)\right) = \frac{x}{\zeta(2)}\prod_{p\mid r}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}, \tag{20}$$

而 I_1, I_2 与 I_3 为 $G(s)$ 沿直线段 $\overline{DC}, \overline{CB}$ 与 $\overline{BA}$ 所取的积分,点 A,

B,C 与 D 由 σ,T 及 b 定义同前。设 x 大于一个绝对常数。由定理 1.3.6 的(ii) 及引理 2.3.1 的(ii) 可得

$$I_1 = O\left(\int_{-T}^{T} x^{\sigma}\tau_a(r)(|t|+2)^{-\frac{1+\sigma}{2}}\cdot(\log x)^3 \mathrm{d}t\right)$$

$$= O(x^{3/5}(\log x)^3\tau_a(r)), \tag{21}$$

$$I_2, I_3 = O\left(\frac{(\log x)^3}{T}\tau_a(r)\left(\int_1^b x\mathrm{d}u + \int_{\sigma}^{1} x^u T^{\frac{1-u}{2}}\mathrm{d}u\right)\right)$$

$$= O(x^{3/5}(\log x)^2\tau_a(r)); \tag{22}$$

其在用到：当 $\mathrm{Re}s \geqslant \sigma$ 时，$\left|\prod_{p|r}(1+\frac{1}{p^s})^{-1}\right| \leqslant \tau_a(r)$。由(19) ~ (22)，可得(ix)。

(x) 由引理 1.1.3 及(ix) 得

$$\sum_{\substack{y<n\leqslant x\\(n,r)=1}}|\mu(n)|\log\frac{n}{y_1}\log\frac{n}{y_2} = -\int_y^x\left(\sum_{\substack{y<n\leqslant u\\(n,r)=1}}|\mu(n)|\right)\frac{1}{u}\log\left(\frac{u^2}{y_1y_2}\right)\mathrm{d}u$$

$$+\left(\sum_{\substack{y<n\leqslant x\\(n,r)=1}}|\mu(n)|\right)\frac{1}{x}\log\left(\frac{x^2}{y_1y_2}\right)$$

$$=-\int_y^x\left(\frac{xu}{\zeta(2)}\prod_{p|r}(1+\frac{1}{p})^{-1} + O(u^{3/5}\tau_a(r)(\log u)^3)\right)\frac{1}{u}\log\left(\frac{u^2}{y_1y_2}\right)\mathrm{d}u$$

$$+\left(\frac{1}{\zeta(2)}\left(\prod_{p|r}(1+\frac{1}{p})^{-1}\right)x + O(x^{3/5}\tau_a(r)(\log x)^3)\right)\frac{1}{x}\log\frac{x^2}{y_1y_2}$$

$$=-\frac{1}{\zeta(2)}\prod_{p|r}(1+\frac{1}{p})^{-1}(2x\log x - 2y\log y - 2x + 2y$$

$$-(\log(y_1y_2))(x-y))$$

$$+\frac{x}{\zeta(2)}\left(\prod_{p|r}(1+\frac{1}{p})^{-1}\right)\cdot\log\frac{x}{y_1}\log\frac{x}{y_2} +$$

$$+ O(x^{3/5}(\log x)^3\log\left(\frac{x^2}{y_1y_2}\right)$$

$$\cdot\tau_a(r)) + O(x^{3/5}(\log x)^3\log\frac{x}{y_1}\log\frac{x}{y_2}\tau_a(r))$$

$$= \frac{x}{\zeta(2)}\Big(\prod_{p\mid r}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}\Big)\Big[\Big(\log\frac{x}{y_1}-1\Big)\Big(\log\frac{x}{y_2}-1\Big)+1\Big]$$

$$+\frac{y}{\zeta(2)}\Big(\prod_{p\mid r}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}\Big)\Big(\log\frac{y^2}{y_1y_2}-2\Big)$$

$$+O\Big(x^{3/5}(\log x)^3\tau_a(r)\Big(\log\frac{x^2}{y_1y_2}+\log\frac{x}{y_1}\cdot\log\frac{x}{y_2}\Big)\Big)。$$

因为

$$\log\Big(\frac{x^2}{y_1y_2}\Big)+\log\frac{x}{y_1}\cdot\log\frac{x}{y_2}<\Big(\log\frac{x}{y_1}+1\Big)\Big(\log\frac{x}{y_2}+1\Big)$$

$$\ll\log\frac{2x}{y_1}\cdot\log\frac{2x}{y_2},$$

(x) 得证。

(xi) 对任意实数 $u, u\geqslant 3$,由定理 1.6.1 的(iii),我们有

$$\sum_{p\leqslant u}\log p=\sum_{n\leqslant u}\Lambda(n)+O\Big(\sum_{\substack{p^m\leqslant u\\ m\geqslant 2}}\log p\Big)$$

$$=u+O(u\exp(-\lambda_1\sqrt{\log u}))+O\Big(\sum_{p\leqslant u^{1/2}}\log p\sum_{m\leqslant\frac{\log u}{\log p}}1\Big)$$

$$=u+O(u\exp(-\lambda_1\sqrt{\log u})),$$

其中 $\lambda_1>0$,λ_1 为一个绝对常数。因此,由引理 1.1.3 可得

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda^2(n)=\sum_{p\leqslant x}(\log p)^2+O\Big(\sum_{p\leqslant x^{1/2}}(\log p)^2\sum_{m\leqslant\frac{\log x}{\log p}}1\Big)$$

$$=\sum_{3<p\leqslant x}(\log p)^2+O(x^{1/2}(\log x)^2)$$

$$=-\int_3^x\Big(\sum_{3<p\leqslant u}\log p\Big)\frac{1}{u}\mathrm{d}u+\Big(\sum_{3<p\leqslant x}\log p\Big)\log x+$$

$$+O(x^{1/2}(\log x)^2)$$

$$=x\log x-x+O(xe^{-\frac{1}{2}\lambda_1\sqrt{\log x}});$$

其中已用到

$$\int_3^x e^{-\lambda_1\sqrt{\log u}}\mathrm{d}u = \int_3^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x = O(\sqrt{x}) + O(xe^{-\frac{1}{2}\lambda_1\sqrt{\log x}})$$
$$= O(xe^{-\frac{1}{2}\lambda_1\sqrt{\log x}})。$$

(xii) 在推论 1.1.4 中取 $a = 1, b = x, f(n) = \frac{1}{n}$,可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} = 1 + \int_1^x \frac{1}{u}\mathrm{d}u - \int_1^x \psi(u)u^{-2}\mathrm{d}u - \frac{1}{2} - \psi(x)\frac{1}{x}$$
$$= \log x + \frac{1}{2} - \int_1^\infty \psi(u)u^{-2}\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$。令 $\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \psi(u)u^{-2}\mathrm{d}u$,则(xii) 得证。

(xiii) 令 $I = \frac{\log x}{\log 2}, x_i = x\cdot 2^{-i}, 0\leqslant i\leqslant I$,我们有

$$\sum_{n\leqslant x} n^{-1}(\tau_a(n))^r\left(\log\frac{2x}{n}\right)^{-s} \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant I}\ \sum_{x_{i+1}\leqslant n\leqslant x_i} n^{-1}(\tau_a(n))^r\left(\log\frac{2x}{n}\right)^{-s}$$
$$\ll x^{-1}\sum_{0\leqslant i\leqslant I}2^i(i+1)^{-s}\Big(\sum_{x_{i+1}\leqslant n\leqslant x_i}(\tau_a(n))^r\Big)$$
$$\ll \sum_{0\leqslant i\leqslant I}(i+1)^{-s} \ll 1;$$

其中已用到(iii)。

(xiv) 由(iii),我们有

$$\sum_{n\leqslant x}(\tau_a(n))^r\cdot(\log 2n)^{-s} = \sum_{n\leqslant\sqrt{x}}(\tau_a(n))^r(\log 2n)^{-s}$$
$$+ \sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x}(\tau_a(n))^r(\log 2n)^{-s}$$
$$\ll \sum_{n\leqslant\sqrt{x}}(\tau_a(n))^r + (\log x)^{-s}\sum_{n\leqslant x}(\tau_a(n))^r$$
$$\leqslant x(\log x)^{-s}。$$

(xv) 令 $I = \frac{\log x}{\log 2}$。由(iii),我们得

$$\sum_{n\leqslant x} n^{-\alpha}(\tau_a(n))^r\left(\log\frac{2x}{n}\right)^{s} \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant I}\ \sum_{x_{i+1}\leqslant n\leqslant x_i} n^{-\alpha}(\tau_a(n))^r\left(\log\frac{2x}{n}\right)^{s}$$

$$\ll \sum_{0 \leqslant i \leqslant I} (i+1)^s (x \cdot 2^{-i})^{-\alpha} \cdot \sum_{x_{i+1} \leqslant n \leqslant x_i} (\tau_a(n))^r$$

$$\ll \sum_{0 \leqslant i \leqslant I} (i+1)^s (x \cdot 2^{-i})^{1-\alpha},$$

其中 $x_i = x \cdot 2^{-i}$。当 $0 < \alpha < 1$ 时，由于级数

$$\sum_{i \geqslant 0} (i+1)^s 2^{-i(1-\alpha)}$$

收敛，可得所需估计。当 $\alpha = 1$ 时，由于 $s \geqslant 0$，所以

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant I+1} n^s \leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant I+1} \int_n^{n+1} u^s \mathrm{d}u = \int_1^{I+2} u^s \mathrm{d}u \leqslant \frac{(I+2)^{s+1}}{s+1} \ll (\log x)^{s+1},$$

因此所需估计也成立。

(xvi) 当 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 时，由引理 1.3.1 我们有

$$F(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{1+s}} = \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right)$$

$$= \frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2(1+s))} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1}。$$

令

$$b = \frac{1}{\log x}, T = x^{2/5}, \sigma = -\frac{1}{2} - \frac{c}{4(\log T)^2}, f(x) = x^{-1},$$

其中 c 为引理 2.3.1 中的常数。则由 (1)、(2) 及 $\zeta(1+b) = O(\log x)$，可得

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,r)=1}} \frac{|\mu(n)|}{n} = E + O\left(\frac{\log x}{T}\right) + \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3), \quad (23)$$

其中 E 为函数

$$G(s) = \frac{x^s}{s} \cdot \frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2(1+s))} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1}$$

在 $s = 0$ 处的残数，I_1, I_2 和 I_3 分别为 $G(s)$ 沿直线段 $\overline{DC}$、$\overline{CB}$ 和 $\overline{BA}$ 所取的积分，点 A, B, C 与 D 由 σ, T 与 b 定义同上。设 x 充分大，则由定理 1.3.6 的 (ii) 及定理 2.3.1 的 (ii)，我们有

$$I = O\left(\int_{-T}^{T} x^{\sigma}(|t|+2)^{-(2+\sigma)/2}(\log x)^3\tau_a(r)\mathrm{d}t\right)$$

$$= O(T^{1/4}x^{-1/2}(\log x)^3\tau_a(r)) = O(x^{-2/5}(\log x)^3\tau_a(r)), \quad (24)$$

$$I_2, I_3 = O\left(\frac{1}{T}\left(\int_{\sigma}^{0}(\log x)^3\cdot x^u T^{-u/2}\mathrm{d}u + \int_0^b(\log x)^3\mathrm{d}u\right)\tau_a(r)\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{T}(\log x)^2\tau_a(r)\right) = O(x^{-2/5}(\log x)^2\tau_a(r)); \quad (25)$$

其中用到估计：当 $\mathrm{Re}s \geqslant \sigma$ 时，$\left|\prod_{p|r}(1+p^{-1-s})^{-1}\right| \leqslant \tau_a(r)$。由于 0 为 $G(s)$ 的 2 阶极点，所以由定理 1.3.5 的(ii) 与推论 1.4.9，可得

$$E = \lim_{s\to 0}\left[sx^s\cdot\frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2(1+s))}\prod_{p|r}\left(1+\frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1}\left(\log x+\frac{1}{s}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} - 2\frac{\zeta'(2(1+s))}{\zeta(2(1+s))} + \sum_{p|r}\frac{\log p}{p^{s+1}+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)}\prod_{p|r}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(\log x + \sum_{p|r}\frac{\log p}{p+1} + c_1\right), \quad (26)$$

其中

$$c_1 = -2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + A + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\rho_n(1-\rho_n)},$$

其中 A 为推论 1.4.9 中的常数，对 ρ_n 求和中 ρ_n 通过 $\zeta(s)$ 的所有的非平凡零点。由(23) ~ (26) 式可见，(xvi) 得证。引理 2.3.2 **证毕**。

应指出的是，在本章的应用中，我们可把引理 2.3.2 中出现的 $e^{-\delta\sqrt{\log(3x)}}$ 都换成$(\log(3x))^{-A}$(这里 A 为常数，$A \geqslant 3$)，因为后者就已够用了。另外，为了书写方便，我们还可把含 $x^{3/5}(\log 3x)^3$ 的余项换成含 x^{1+a} 的余项，这样也够用了。引理 2.3.2 中若干余

项都还能改进,但我们并不需要。

根据积性函数的定义,可以证明:

引理 2.3.3　(i) 设 n 为正整数,$f(n)$ 为积性函数,则

$$\sum_{d \mid n} f(d) = \prod_{p^r \parallel n} (1 + f(p) + \cdots + f(p^r)),$$

这里 d, r 为正整数,p 为素数,$p^r \parallel n$ 表示 $p^r \mid n$ 但 $p^{r+1} \nmid n$。

(ii) 对于正整数 n,

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n。$$

(iii) 对于正整数 n,

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & 若\ n = 1, \\ 0, & 若\ n > 1。\end{cases}$$

证明:(i) 设 n 的标准素因子分解式为 $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$,这里 $p_1, \cdots, p_t$ 为不同的素数,$r_1, \cdots, r_t$ 为正整数。则 d 取遍 n 所有不同的正整数因子,当且仅当 d 形如

$$d = p_1^{x_1} \cdots p_t^{x_t},$$

且每个整数 x_i 取过整数 $0, 1, \cdots, r_i$。所以,由于 $f(d)$ 是积性函数,可得

$$\begin{aligned}\sum_{d \mid n} f(d) &= \sum_{0 \leqslant x_1 \leqslant r_1} \cdots \sum_{0 \leqslant x_t \leqslant r_t} f(p_1^{x_1} \cdots p_t^{x_t}) \\ &= \sum_{0 \leqslant x_1 \leqslant r_1} \cdots \sum_{0 \leqslant x_t \leqslant r_t} f(p_1^{x_1}) \cdots f(p_t^{x_t}) \\ &= \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} \Big(\sum_{0 \leqslant x_i \leqslant r_i} f(p_i^{x_i}) \Big)。\end{aligned}$$

(ii) 因为

$$\varphi(1) = 1, \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}, \alpha \geqslant 1,$$

由(i) 可得(ii)。

(iii) 由于 $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu(p^\alpha) = 0 (\alpha \geqslant 2)$,由(a) 可得(c)。**证毕**。

本节的主要目的为证明下面的结果:

定理 2.3.4 设 $z\geqslant 3$,

$$\xi_d=\begin{cases}\mu(d)\dfrac{\log(z/d)}{\log z}, & d\leqslant z,\\ 0, & d>z,\end{cases}$$

则当 $N\geqslant 1$ 时

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{d\mid n}\xi_d\Big)^2=\frac{N}{(\log z)^2}\log(\min(N,z))+O\Big(\frac{N}{(\log z)^2}\Big)+O(1)。$$

证明:分两种情况

(a) 当 $N\geqslant z^2$ 时,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{d\mid n}\xi_d\Big)^2&=\sum_{d_1\leqslant N}\sum_{d_2\leqslant N}\xi_{d_1}\xi_{d_2}\sum_{\substack{[d_1,d_2]\mid n\\ n\leqslant N}}1\\&=\sum_{d_1\leqslant N}\sum_{d_2\leqslant N}\xi_{d_1}\xi_{d_2}\Big(\frac{N}{[d_1,d_2]}+O(1)\Big)\\&=N\sum_{d_1\leqslant z}\sum_{d_2\leqslant z}\frac{\xi_{d_1}\xi_{d_2}}{d_1d_2}(d_1,d_2)\\&\quad+O\bigg(\Big(\sum_{d\leqslant z}\Big(1-\frac{\log d}{\log z}\Big)\Big)^2\bigg)。\end{aligned}\tag{27}$$

由引理 2.3.3 的(ii) 可知

$$(d_1,d_2)=\sum_{m\mid(d_1,d_2)}\varphi(m),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{d_1\leqslant z}\sum_{d_2\leqslant z}\frac{\xi_{d_1}\xi_{d_2}}{d_1d_2}(d_1,d_2)&=\sum_{m\leqslant z}\varphi(m)\sum_{\substack{d_1,d_2\leqslant z\\ d_1\mid m,d_2\mid m}}\frac{\xi_{d_1}\xi_{d_2}}{d_1d_2}\\&=\sum_{m\leqslant z}\frac{\varphi(m)}{m^2}\Big(\sum_{k\leqslant z/m}\xi_{mk}\frac{1}{k}\Big)^2\\&=\sum_{m\leqslant z}\frac{|\mu(m)|\varphi(m)}{m^2}\Big(\sum_{\substack{k\leqslant z/m\\(k,m)=1}}\frac{\mu(k)}{k}\times\end{aligned}$$

$$\left(\log\frac{z}{m}-\log k\right)\Big)^2\cdot\frac{1}{(\log z)^2}。$$

由引理 2.3.2 的(i) 和(iv),得到

$$\sum_{\substack{k\leqslant z/m\\(k,m)=1}}\frac{\mu(k)}{k}\left(\log\frac{z}{m}-\log k\right)=\frac{m}{\varphi(m)}+O\left((\tau_a(m))^2\left(\log\frac{2z}{m}\right)^{-5}\right),$$

所以,再由引理 2.3.2 的(viii) 和(xiii) 可得

$$(\log z)^2\sum_{d_1\leqslant z}\sum_{d_2\leqslant z}\frac{\xi_{d_1}\xi_{d_2}}{d_1d_2}(d_1,d_2)=\sum_{m\leqslant z}\frac{|\mu(m)|\varphi(m)}{m^2}\times$$

$$\left(\frac{m^2}{\varphi^2(m)}+O\left(\frac{m}{\varphi(m)}(\tau_a(m))^2\left(\log\frac{2z}{m}\right)^{-5}\right)\right.$$

$$\left.+O((\tau_a(m))^4\left(\log\frac{2z}{m}\right)^{-10}\right)$$

$$=\sum_{m\leqslant z}\frac{|\mu(m)|}{\varphi(m)}+O\left(\sum_{m\leqslant z}m^{-1}(\tau_a(m))^2\left(\log\frac{2z}{m}\right)^{-5}\right)$$

$$+O\left(\sum_{m\leqslant z}m^{-1}(\tau_a(m))^4\left(\log\frac{2z}{m}\right)^{-10}\right)=\log z+O(1)。\quad(28)$$

由推论 1.1.4 我们有

$$\sum_{d\leqslant z}\left(1-\frac{\log d}{\log z}\right)=[z]-\frac{1}{\log z}\left(\sum_{1<d\leqslant z}\log d\right)$$

$$=[z]-\frac{1}{\log z}\left(\int_1^z\log u\,du+\int_1^z\psi(u)\frac{1}{u}du-\psi(z)\cdot\frac{1}{\log z}\right)$$

$$=[z]-z+\frac{z}{\log z}+O(1)=\frac{z}{\log z}+O(1)。\quad(29)$$

由(27)、(28) 及(29),可知当 $z^2\leqslant N$ 时定理 2.3.4 成立。

(b) 设 $z^2>N\geqslant1$。若自然数 n 的标准素因子分解式为 $n=p_1^{x_1}\cdots p_s^{x_s}$, $x_i\geqslant1$, $p_1,\cdots,p_s$ 为不同的素数,则由 $\Lambda(d)$ 的定义可得

$$\sum_{d\mid n}\Lambda(d)=\sum_{i=1}^s\sum_{d\mid p_i^{x_i}}\Lambda(d)=\sum_{i=1}^s x_i\log p=\log n,$$

因此,应用引理 2.3.3 的(iii),可得

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)\log\frac{n}{d}=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{m\mid\frac{n}{d}}\Lambda(m)=\sum_{m\mid n}\Lambda(m)\sum_{d\mid\frac{n}{m}}\mu(d)=\Lambda(n),$$

于是,当 $n>1$ 时,

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)\log d=-\Lambda(n)。\tag{30}$$

我们有

$$(\log z)^2\sum_{n\leqslant N}\Big(\sum_{d\mid n}\xi_d\Big)^2=\sum_{n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2$$

$$=(\log z)^2+\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2。\tag{31}$$

由 $N\leqslant z$,则由(30)及引理 2.3.2 的(xi)可得

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}(\Lambda(n))^2$$

$$=N\log N+O(N)。\tag{32}$$

由(31)与(32),可知 $N\leqslant z$ 时定理成立。设 $z^2>N>z$,则由(30)可得

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{d\mid n}\mu(d)\log\frac{z}{d}-\sum_{\substack{d\mid n\\ d>z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2$$

$$=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\Lambda(n)-\sum_{\substack{d\mid n\\ d>z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2$$

$$=S_1-2S_2+S_3,\tag{33}$$

这里

$$S_1=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}(\Lambda(n))^2,$$

$$S_2=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Lambda(n)\sum_{\substack{d\mid n\\ d>z}}\mu(d)\log\Big(\frac{z}{d}\Big),$$

$$S_3 = \sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d>z}}\mu(d)\log\Big(\frac{z}{d}\Big)\Big)^2。$$

我们有

$$\begin{aligned}S_2 &= \sum_{z<p\leqslant N}\log p\Big(\sum_{\substack{d\mid p\\ d>z}}\mu(d)\log\Big(\frac{z}{d}\Big)\Big)\\ &\quad + O\Big(\sum_{p\leqslant\sqrt{N}}(\log p)\sum_{\substack{d\mid p\\ d>z}}\Big(\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)\Big(\sum_{m\leqslant\frac{\log x}{\log p}}1\Big)\Big)\\ &= \sum_{z<p\leqslant N}\log p(\log p-\log z)+O(N^{1/2}(\log N)^2)\\ &= \sum_{z\leqslant n\leqslant N}(\Lambda(n))^2-(\log z)\sum_{z<n\leqslant N}\Lambda(n)\\ &\quad + O(N^{1/2}(\log N)^2)。\end{aligned}$$

所以由定理 1.6.1 的(iii) 和引理 2.3.2 的(xi) 可得

$$\begin{aligned}S_1-2S_2 &= -\sum_{n\leqslant N}(\Lambda(n))^2+2\sum_{n\leqslant z}(\Lambda(n))^2\\ &\quad -\log z(N-z+O(N(\log N)^{-3}))\\ &= N\log\Big(\frac{z^2}{N}\Big)+O(N)。\end{aligned}\tag{34}$$

当 n 为满足 $2\leqslant n\leqslant N$ 的正整数时,显然成立着

$$\sum_{\substack{q\mid n\\ q>z}}\mu(q)\log\Big(\frac{z}{q}\Big)=\sum_{\substack{d\mid n\\ \frac{n}{d}>z}}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\log\Big(\frac{zd}{n}\Big)。\tag{35}$$

于是,对于 S_3,我们得

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ \frac{n}{d}>z}}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\log\Big(\frac{zd}{n}\Big)\Big)^2\\ &= \sum_{d_1<\frac{N}{z}}\ \sum_{d_2<\frac{N}{z}}\ \sum_{\substack{d_1\mid n,\, d_2\mid n\\ N\geqslant n>d_1z,\, d_2z}}\mu\Big(\frac{n}{d_1}\Big)\mu\Big(\frac{n}{d_2}\Big)\log\Big(\frac{zd_1}{n}\Big)\log\Big(\frac{zd_2}{n}\Big)。\end{aligned}$$

按 d_1 与 d_2 的最大公因子(d_1,d_2) 对这个多重求和加以处理。设

$(d_1,d_2)=u$，则 $u<\frac{N}{z}$。当 u 取定时，设 $d_1=e_1u,d_2=e_2u,(e_1,e_2)=1$，又设 $n=d_1m_1=d_2m_2$，则由 $e_1m_1=e_2m_2$，可得 $e_1\mid m_2$，$e_2\mid m_1$。设 $m_1=e_2f,m_2=e_1f$，则

$$\frac{n}{d_1}=m_1=e_2f,\frac{n}{d_2}=m_2=e_1f。$$

因此，在 $(e_1e_2,f)=1$ 时，

$$\mu\left(\frac{n}{d_1}\right)\mu\left(\frac{n}{d_2}\right)=\mu(e_1)\mu(e_2)\mid\mu(f)\mid。$$

所以我们得到

$$S_3=\sum_{u<\frac{N}{z}}\sum_{e_1<\frac{N}{uz}}\mu(e_1)\sum_{\substack{e_2<\frac{N}{uz}\\(e_2,e_1)=1}}\mu(e_2)\times$$

$$\sum_{\substack{N_1\geqslant f>N_2\\(f,e_1e_2)=1}}\mid\mu(f)\mid\log\left(\frac{z}{e_1f}\right)\log\left(\frac{z}{e_2f}\right),\tag{36}$$

其中 $N_1=\frac{N}{ue_1e_2},N_2=z\max\left(\frac{1}{e_1},\frac{1}{e_2}\right)$。由引理 2.3.2 的(x)得

$$\sum_{\substack{N_1\geqslant f>N_2\\(f,e_1e_2)=1}}\mid\mu(f)\mid\log\frac{e_1f}{z}\log\frac{e_2f}{z}$$

$$=\frac{N_1}{\zeta(2)}\frac{e_1e_2}{k(e_1e_2)}\left(\left(\log\frac{N_1e_1}{z}-1\right)\left(\log\frac{N_1e_2}{z}-1\right)+1\right)$$

$$+\frac{N_2e_1e_2}{\zeta(2)k(e_1e_2)}\left(\log\left(\frac{N_2^2}{z^2}e_1e_2\right)-2\right)+O(x^{1+a}\tau_a(r)\log\frac{2x}{y_1}\log\frac{2x}{y_2}),$$

其中 $k(r)=r\prod_{p\mid r}(1+\frac{1}{p})$。所以，由引理 2.3.2 的(xv)、(v) 与 (vi)，我们有(其中 $a=-\frac{1}{3}$)

$$\sum_{\substack{e_2<\frac{N}{kz}\\(e_2,e_1)=1}}\mu(e_2)\sum_{\substack{N_1\geqslant f>N_2\\(f,e_1e_2)=1}}\mid\mu(f)\mid\log\frac{e_1f}{z}\log\frac{e_2f}{z}$$

$$= \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{kz} \\ (e_2, e_1) = 1}} \mu(e_2)\Big[\frac{N}{\zeta(2)u} \cdot \frac{1}{k(e_1)k(e_2)}\Big(\Big(\log\Big(\frac{N}{ue_2z}\Big) - 1\Big)$$

$$\cdot \Big(\log\Big(\frac{N}{ue_1z}\Big) - 1\Big) + 1\Big)$$

$$+ \frac{z\max(e_1, e_2)}{\zeta(2)k(e_1)k(e_2)}\Big(\log\Big(\max\Big(\frac{e_2}{e_1}, \frac{e_1}{e_2}\Big)\Big) - 2\Big)\Big]$$

$$+ O\Big(\Big(\frac{N}{ue_1}\Big)^{1+a}\tau_a(e_1)\log\Big(\frac{2N}{ze_1}\Big)\Big(\sum_{e_2 < \frac{N}{z}} e_2^{-1-a}\tau_a(e_2)\log\Big(\frac{2N_1e_1}{z}\Big)\Big)\Big)$$

$$= \frac{N}{\zeta(2) \cdot u \cdot k(e_1)}\Big[\Big(\log\Big(\frac{N}{ue_1z}\Big) - 1\Big) \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1) = 1}} \frac{\mu(e_2)}{k(e_2)}\log\Big(\frac{N}{ue_2z}\Big)$$

$$+ \Big(2 - \log\Big(\frac{N}{ue_1z}\Big)\Big) \sum_{e_2 < \frac{N}{uz}} \frac{\mu(e_2)}{k(e_2)}\Big]$$

$$+ \frac{z}{\zeta(2)k(e_1)} \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1) = 1}} \mu(e_2)\frac{\max(e_1, e_2)}{k(e_2)}\Big(\log\Big(\max\Big(\frac{e_2}{e_1}, \frac{e_1}{e_2}\Big)\Big) - 2\Big)$$

$$+ O\Big(\frac{N}{ue_1}\Big(\frac{z}{e_1}\Big)^a\tau_a(e_1)\log\Big(\frac{2N}{ze_1}\Big)\Big)$$

$$= \frac{N}{ue_1}\Big(\log\Big(\frac{N}{ue_1z}\Big) - 1\Big) + O\Big(\frac{N}{ue_1}(\tau_a(e_1))^2\Big(\log\frac{3N}{uz}\Big)^{-5}\Big)$$

$$+ \frac{z}{\zeta(2)k(e_1)} \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1) = 1}} \mu(e_2)\frac{\max(e_1, e_2)}{k(e_2)}\Big(\log\Big(\max\Big(\frac{e_1}{e_2}, \frac{e_2}{e_1}\Big)\Big) - 2\Big)$$

$$+ O\Big(Nu^{-1}z^ae_1^{-1-a}\tau_a(e_1) \cdot \log\Big(\frac{2N}{ze_1}\Big)\Big)。 \tag{37}$$

进一步,应用引理 2.3.2 的(iv)、(i)、(xiv)、(v)、(vii) 与(xv),当 $u < N/z$ 且 u 固定时,可知

$$\sum_{e_1 < \frac{N}{uz}} \frac{N \cdot \mu(e_1)}{ue_1}\Big(\log\Big(\frac{N}{ue_1z}\Big) - 1\Big) = \frac{N}{u} + O\Big(\frac{N}{u}\Big(\log\frac{3N}{uz}\Big)^{-5}\Big),$$

$$O\Big(\sum_{e_1<\frac{N}{uz}}\frac{N}{ue_1}(\tau_a(e_1))^2\Big(\log\frac{3N}{uz}\Big)^{-5}\Big)=O\Big(\frac{N}{u}\Big(\log\frac{3N}{uz}\Big)^{-4}\Big),$$

$$\sum_{e_1<\frac{N}{uz}}\frac{z\mu(e_1)}{\zeta(2)k(e_1)}\sum_{\substack{e_2<\frac{N}{uz}\\(e_2,e_1)=1}}\mu(e_2)\frac{\max(e_1,e_2)}{k(e_2)}\Big(\log\Big(\max\Big(\frac{e_1}{e_2},\frac{e_2}{e_1}\Big)\Big)-2\Big)$$

$$=\frac{z}{\zeta(2)}\sum_{\substack{e_1,e_2<\frac{N}{uz}\\(e_2,e_1)=1}}\frac{\mu(e_1)\mu(e_2)\max(e_1,e_2)}{k(e_1)k(e_2)}\Big(\log\Big(\max\Big(\frac{e_1}{e_2},\frac{e_2}{e_1}\Big)\Big)-2\Big)$$

$$=\frac{2z}{\zeta(2)}\sum_{\substack{e_1<e_2<\frac{N}{uz}\\(e_2,e_1)=1}}\frac{e_2\mu(e_1)\mu(e_2)}{k(e_1)k(e_2)}\Big(\log\frac{e_2}{e_1}-2\Big)+O(z)$$

$$=\frac{2z}{\zeta(2)}\sum_{e_2<\frac{N}{uz}}\frac{e_2\mu(e_2)}{k(e_2)}\Big[-\sum_{\substack{e_1<e_2\\(e_1,e_2)=1}}\frac{\mu(e_1)}{k(e_1)}\log e_1+(\log e_2-2)$$

$$\cdot\Big(\sum_{\substack{e_1<e_2\\(e_2,e_1)=1}}\frac{\mu(e_1)}{k(e_1)}\Big)\Big]+O(z)$$

$$=\frac{2z}{\zeta(2)}\sum_{e_2<\frac{N}{uz}}\frac{e_2\mu(e_2)}{k(e_2)}\Big(\zeta(2)\frac{k(e_2)}{e_2}$$

$$+O((\tau_a(e_2))^2(\log 3e_2)^{-5})\Big)+O(z)$$

$$=2z\sum_{e_2<\frac{N}{uz}}\mu(e_2)+O\Big(z\sum_{e_2<\frac{N}{uz}}(\tau_a(e_2))^2(\log(3e_2))^{-5}\Big)+O(z)$$

$$=O\Big(\frac{N}{u}\Big(\log\Big(\frac{3N}{uz}\Big)\Big)^{-5}\Big)+O(z),$$

$$O\Big(\sum_{e_1<\frac{N}{uz}}\frac{N}{u}z^ae_1^{-1-a}\tau_a(e_1)\log\Big(\frac{2N}{ze_1}\Big)\Big)=O\Big(\frac{N}{u}z^a\Big(\frac{uz}{N}\Big)^a\Big)$$

$$=O(N^{1-a}z^{2a}u^{a-1})。$$

因此,由(36)及(37)可得

$$S_3=N\Big(\sum_{u\leqslant\frac{N}{z}}\frac{1}{u}\Big)+O\Big(N\sum_{u\leqslant\frac{N}{z}}\frac{1}{u}\Big(\log\frac{3N}{uz}\Big)^{-4}\Big)$$

$$+ O(N) + O(N^{1-a}z^{2a})。\qquad (38)$$

应用引理 2.3.2 的(xii)、(xiii),并注意到由 $N \leqslant z^2$ 可知

$$N^{1-a}z^{2a} = N^{4/3}z^{-2/3} = O(N),$$

从(38) 可得

$$S_3 = N\log\frac{N}{z} + O(N)。\qquad (39)$$

由(33)、(34) 及(39),可知当 $z^2 \geqslant N > z$ 时成立着

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\mu(d)\log\frac{z}{d}\Big)^2 = N\log z + O(N)。\qquad (40)$$

由(31)、(32) 以及(40),可知定理 2.3.4 在 $z^2 > N$ 时也成立。**证毕**。

练　　习

(Ⅰ) 给出引理 2.3.2 的(d) 及(f) 的证明。

(Ⅱ) 令 $f(n) = \begin{cases}\mu(s), & 若\ n = s^2, s \geqslant 1,\\ 0, & 否则,\end{cases}$

证明 $f(n)$ 为积性函数。由此, 应用定理 2.3.3 的(i), 证明 $|\mu(n)| = \sum\limits_{r^2\mid n}\mu(r)$。

(Ⅲ) 应用等式 $\sum\limits_{d\mid n}\Lambda(d) = \log n$(见本节(30) 式的推导),给出 § 1.4 的(33) 式新的证明。类似地,证明若 $\mathrm{Re}s > 1$,则

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}。$$

§2.4 L 函数的零点密度估计

设 $Q \geqslant 3, T \geqslant 3$,以及 $5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1$。对于正整数 $q, 3 \leqslant q \leqslant Q$,以及模 q 的原特征 χ,我们用 $N(\alpha, T, \chi)$ 表示函数 $L(s, \chi)$ 的满足 $\alpha \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1$ 和 $|\mathrm{Im}\rho| \leqslant T$ 的非平凡零点 ρ 的个数(一个零点是几阶的就被计数几次)。我们的目的是估计量

$$A(\alpha, T, Q) = \sum_{3 \leqslant q \leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} N(\alpha, T, \chi),$$

这里 $\sideset{}{^*}\sum_{\bmod q}$ 表示对模 q 的所有原特征求和。我们需要两个引理。

引理 2.4.1 设 $q \geqslant 3$, χ 为模 q 的一个原特征, $s_0 = 1 + it_0$, t_0 为一个实数, d 为一个正数, $d = O(1)$。若我们用 $M(d, s_0, \chi)$ 表示函数 $L(s, \chi)$ 的满足 $|s - s_0| \leqslant d$ 的非平凡零点的个数(一个零点是几阶的就重复计数几次),则有

$$M(d, s_0, \chi) = O(d\log(q(|t_0| + 2))) + O(1)。$$

证明: 由推论 1.4.7,对于 $s_1 = s_0 + d = 1 + d + it_0$,我们有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{L'(s_1, \chi)}{L(s_1, \chi)}\right) + \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{s_1 + \delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s_1 + \delta}{2}\right)}\right)$$

$$= \sum_{n \geqslant 1}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_1 - z_n}\right), \tag{1}$$

其中 $\delta = 0$ 或 1 视 $\chi(-1) = 1$ 或 -1 而定。一方面,若记 $z_n = \sigma_n + it_n, n \geqslant 1$,则有

$$\sum_{n \geqslant 1}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_1 - z_n}\right) = \sum_{n \geqslant 1}\frac{1 + d - \sigma_n}{(1 + d - \sigma_n)^2 + (t_0 - t_n)^2}$$

$$\geqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{d}{2(1-\sigma_n)^2+2d^2+(t_0-t_n)^2}$$

$$\geqslant \frac{d}{2}\cdot \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(1-\sigma_n)^2+d^2+(t_0-t_n)^2}$$

$$\geqslant \frac{d}{2}\cdot \sum_{|s_0-z_n|\leqslant d} \frac{1}{(1-\sigma_n)^2+d^2+(t_0-t_n)^2}$$

$$\geqslant \frac{1}{4d}\cdot M(d,s_0,\chi),$$

另一方面,由推论 1.4.9 及定理 1.1.5 的(v) 可得

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{L'(s_1,\chi)}{L(s_1,\chi)}\right)\right| \leqslant \left|\frac{L'(s_1,\chi)}{L(s_1,\chi)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+d}}$$

$$= \left|\frac{\zeta'(d+1)}{\zeta(d+1)}\right| \ll d^{-1},$$

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{s_1+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s_1+\delta}{2}\right)}\right)\right| \leqslant \log(|t_0|+2)。$$

因此,由(1) 可得

$$M(d,s_0,\chi) \ll 1 + d\log(q(|t_0|+2))。$$

证毕。

引理 2.4.2　(i) 设 $\xi\geqslant 3$, q 为整数, $q\geqslant 3$, p 表示素数,则

$$\sum_{p\leqslant \xi}\frac{1}{p} = \log\log \xi + O(1)。$$

(ii) $\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right) \ll \log\log(3q)$。

(iii) $\frac{q}{\varphi(q)} \ll \log\log(3q)$。

证明:(i) 由引理 1.1.3 及定理 1.6.1 的(iv) 可得

$$\sum_{p\leqslant \xi}\frac{1}{p} = \sum_{2<p\leqslant \xi}\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \int_2^{\xi}(\pi(u))\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u^2} + \pi(\xi)\cdot\frac{1}{\xi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_2^{\xi} \left(\frac{u}{\log u} + O\left(\frac{u}{\log^2 u} \right) \right) \frac{\mathrm{d}u}{u^2} + O\left(\frac{1}{\log \xi} \right) \\
&= \int_2^{\xi} \frac{\mathrm{d}u}{u \log u} + O\left(\int_2^{\xi} \frac{\mathrm{d}u}{u(\log u)^2} \right) + O\left(\frac{1}{\log \xi} \right) \\
&= \log\log \xi + O(1)。
\end{aligned}
$$

(ii) 令 $k = \log(3q)$，我们有

$$
\begin{aligned}
\prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{1}{p} \right) &= \exp\left(\sum_{p \mid q} \log\left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \leqslant \exp\left(\sum_{p \mid q} \frac{1}{p} \right) \\
&\leqslant \exp\left(\sum_{p \leqslant k} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p \mid q \\ p > k}} \frac{1}{p} \right) \\
&\leqslant \exp\left(\log\log k + O(1) + \frac{1}{k} \cdot \frac{\log q}{\log 2} \right) \\
&\ll \log k = \log\log(3q);
\end{aligned}
$$

其中用到(i) 以及 $\sum\limits_{p \mid q} 1 \leqslant \dfrac{\log q}{\log 2}$。

(iii) 因为

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{\varphi(q)} &= \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \\
&\leqslant \prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \\
&= \zeta(2) \prod_{p \mid q} \left(1 + \frac{1}{p} \right),
\end{aligned}
$$

由(ii) 可得(iii)。**证毕**。

我们要证明的关于 L 函数零点密度估计的结果为：

定理 2.4.3　设 $Q \geqslant 3, T \geqslant 3, \dfrac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$。对于正整数 q，$q \geqslant 3$，及模 q 的原特征 χ，我们用 $N(\alpha, T, \chi)$ 表示函数 $L(s, \chi)$ 的满足

$$
\rho = \sigma + it, \alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, |t| \leqslant T
$$

的非平凡零点 ρ 的个数(其中同一个零点是几阶的就重复计数几次),则

$$A(\alpha,T,Q)=\sum_{3\leqslant q\leqslant Q}\ \sum_{\chi \bmod q}{}^{*} N(\alpha,T,\chi)$$
$$\ll (TQ^2)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log\log(QT))^3,$$

这里 $\sum\limits_{\chi \bmod q}{}^{*}$ 表示对模 q 的全体原特征 χ 求和。

证明: 令 $L=\log(Q(T+2))$,并记

$$D=\{s\,|\,s=u+ib,\alpha\leqslant u\leqslant 1,\ -T\leqslant b\leqslant T\},$$
$$D_r=\{s\,|\,s=u+ib,\alpha\leqslant u\leqslant 1,rL^{-1}\leqslant b\leqslant (r+1)L^{-1}\},\quad(2)$$

这里 r 为整数。显然,存在唯一的正整数 $Y,Y<\frac{1}{2}(LT+2)$,使得

$$(2Y-2)L^{-1}<T\leqslant 2YL^{-1}。$$

令

$$D^{(0)}=\bigcup_{\substack{|r|\leqslant 2Y\\ 2|r}}D_r,\quad D^{(1)}=\bigcup_{\substack{|r|\leqslant 2Y+1\\ 2\nmid r}}D_r,$$

则 $D\subseteq D^{(0)}\cup D^{(1)}$,

$$N(\alpha,T,\chi)\leqslant N^{(0)}(\alpha,T,\chi)+N^{(1)}(\alpha,T,\chi),$$
$$A(\alpha,T,Q)\leqslant A^{(0)}(\alpha,T,Q)+A^{(1)}(\alpha,T,Q),$$

其中 $N^{(j)}(\alpha,T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 的满足 $\rho\in D^{(j)}$ 的非平凡零点个数,一个零点是几阶的就被重复计算几次,而

$$A^{(j)}(\alpha,T,Q)=\sum_{3\leqslant q\leqslant Q}\ \sum_{\chi \bmod q}{}^{*} N^{(j)}(\alpha,T,\chi),j=0,1。$$

我们来估计 $N^{(0)}(\alpha,T,Q)$。由定理1.5.2,存在绝对常数 $c_2,0<c_2<\frac{1}{2}$,使得当 $1-\alpha\leqslant c_2L^{-1}$ 时,$A^{(0)}(\alpha,T,Q)\leqslant 1$,设 QT 充分大,且

$$c_2L^{-1}<1-\alpha\leqslant\frac{1}{6}。$$

对给定的正整数 $q, 3 \leqslant q \leqslant Q$，模 q 的原特征 χ，及每个 r，$2 \mid r, |r| \leqslant 2Y, D_r$ 中或至少含有 $L(s,\chi)$ 的一个零点或不含有 $L(s,\chi)$ 的零点。

令 $\mathscr{A}(q,\chi) = \{r \mid r$ 为整数，$2 \mid r, |r| \leqslant 2Y, D_r$ 中至少含有一个 $L(s,\chi)$ 的零点$\}$。

设 $\mathscr{A}(q,\chi)$ 中共有 K 个元素，$K = K(q,\chi)$，并将 K 个整数依由小至大的顺序记为 $r(1), \cdots, r(K)$。我们可在每个 $D_{r(v)}$ 中取定一个 $L(s,\chi)$ 的零点 $\rho_v = \rho_v(\chi), 1 \leqslant v \leqslant K$，并记 $\rho_v = \sigma_v + it_v, s_v = 1 + it_v$。注意到，当 $s \in D_{r(v)}$ 时，

$$|s - s_v| \leqslant \sqrt{(1-\alpha)^2 + L^{-2}} \leqslant (1 + c_2^{-2})^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)。$$

因此，若用 $N_v(q,\chi)$ 记 $D_{r(v)}$ 中 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点个数(几阶零点就被重复计数几次)，则由引理 2.4.1，我们有

$$N^{(0)}(\alpha, T, \chi) \ll \sum_{1 \leqslant v \leqslant K} N_v(q,\chi) \ll K \cdot (1 + (1-\alpha)L)$$
$$\ll K \cdot (1-\alpha)L,$$

所以

$$A^{(0)}(\alpha, T, Q) \ll (1-\alpha)L \sum_{3 \leqslant q \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod q}{}^{*} K(q,\chi)$$
$$= (1-\alpha)L \cdot J。 \tag{3}$$

下面我们估计 J。令 $\varepsilon = 10^{-2}$。设 QT 充分大，使得 $(QT)^{\varepsilon} > 3$。在定理 2.2.2 中令 $R = z = (QT)^{\varepsilon}, x = (Q^2T)^{\frac{7}{4}(1-\varepsilon)}, y = x(\log x)^2 > z, f(n) = \mu(n)\varphi(n), \chi(n)$ 为模 q 的任一原特征，$3 \leqslant q \leqslant Q$，以及

$$a(n) = \sum_{d \mid n} \xi_d,$$

$$\xi_d = \begin{cases} \mu(d) \dfrac{\log z/d}{\log z}, & d \leqslant z, \\ 0, & d > z, \end{cases}$$

则对于 $L(s,\chi)$ 的任一满足 $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1$ 的非平凡零点 ρ，我们有

$$e^{-1/x} = -\sum_{2 \leqslant n \leqslant y} a(n)\chi(n)f_r(n)n^{-\rho}e^{-n/x} + O(L^{-1})$$

其中 r 为任一正整数。由 $e^{-1/x} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$ 可得

$$\left(\sum_{\substack{(r,q)=1 \\ r \leqslant R}} \frac{|\mu(r)|}{r}\right)(1 + O(L^{-1}))$$

$$= -\sum_{2 \leqslant n \leqslant y} a(n)\chi(n)n^{-\rho}e^{-n/x} \cdot \left(\sum_{\substack{r \leqslant R \\ (r,q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n)\right)。\quad (4)$$

令

$B = \{(q,\chi,s) | 3 \leqslant q \leqslant Q, \chi$ 为模 q 的原特征，$s = \rho_v(\chi) - \alpha, 1 \leqslant v \leqslant K(q,\chi)\}$，

其中 $K(q,\chi)$ 及 $\rho_v(\chi)$ 的定义同上。设 $N = [y^2]$，而

$$\phi_1 = 1, \phi_n = \begin{cases} a(n)n^{-\alpha}e^{-n/x}, & \text{若 } 2 \leqslant n \leqslant y, \\ 0, & \text{若 } y < n \leqslant N, \end{cases}$$

$$\lambda_{n,q} = \sum_{\substack{r \leqslant R \\ (r,q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n), n \geqslant 1,$$

$$b_n = n^{-1}(e^{-n/x} - e^{-n}), n \geqslant 1。$$

由定理 2.1.1 的(ii)，我们得

$$\left(\sum_{(q,\chi,s) \in B} \left| \sum_{2 \leqslant n \leqslant y} a(n)\chi(n)n^{-s-\alpha}e^{-n/x}\left(\sum_{\substack{r \leqslant R \\ (r,q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n)\right) \right|\right)^2$$

$$= \left(\sum_{(q,\chi,s) \in B} \left| \sum_{n=1}^{N} \phi_n \lambda_{n,q} \chi(n) n^{-s} \right|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n \leqslant y} |\phi_n|^2 b_n^{-1}\right) \times$$

$$\left(\sum_{(q,\chi,s) \in B} \sum_{(q',\chi',s') \in B} \left| \sum_{n \leqslant N} b_n \bar{\lambda}_{n,q} \lambda_{n,q'} \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s'-\bar{s}} \right|\right)。\quad (5)$$

由于当 $n \geqslant 1$ 时，$n\left(\frac{2}{x} - 1\right) \leqslant -\frac{1}{2}$，

$$e^{-2n/x}(e^{-n/x}-e^{-n})^{-1}=(e^{n/x}-e^{n\left(\frac{2}{x}-1\right)})^{-1}\leqslant(1-e^{-\frac{1}{2}})^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant y}|\phi_n|^2b_n^{-1}&=(e^{-1/x}-e^{-1})^{-1}\\&\quad+\sum_{2\leqslant n\leqslant y}|a(n)|^2n^{1-2\alpha}e^{-2n/x}(e^{-n/x}-e^{-n})^{-1}\\&\leqslant(1-e^{-\frac{1}{2}})^{-1}\sum_{2\leqslant n\leqslant y}|a(n)|^2n^{1-2\alpha}+O(1)。\end{aligned}\tag{6}$$

由分部求和(引理 1.1.3) 及定理 2.3.4,可得

$$\begin{aligned}\sum_{1<n\leqslant y}|a(n)|^2n^{1-2\alpha}&=-\int_1^y\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant u}|a(n)|^2-1\Big)(1-2\alpha)u^{1-2\alpha}du\\&\quad+\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant y}|a(n)|^2-1\Big)y^{1-2\alpha}\\&=-\int_1^y\Big(\frac{u\log(\min(u,z))}{(\log z)^2}\\&\quad+O\Big(\frac{u}{(\log z)^2}\Big)\Big)(1-2\alpha)u^{-2\alpha}du\\&\quad+\Big(\frac{y}{\log z}+O\Big(\frac{y}{\log z}\Big)\Big)y^{1-2\alpha}-1\\&=\frac{1}{2-2\alpha}\cdot\frac{y^{2-2\alpha}}{\log z}+O\Big(\frac{y^{2-2\alpha}}{(\log z)^2}\Big)-1。\end{aligned}\tag{7}$$

由(6)、(7),以及

$$y^{2-2\alpha}=e^{(2-2\alpha)\log y}\geqslant2(1-\alpha)\log y>2(1-\alpha)\log z,$$

可得

$$\sum_{n\leqslant y}|\phi_n|^2b_n^{-1}\ll\frac{y^{2-2\alpha}}{(1-\alpha)\log z}\ll y^{2-2\alpha}。\tag{8}$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant N}b_n\lambda_{n,q}\bar{\lambda}_{n,q'}\bar{\chi}(n)\chi'(n)n^{-s'-\bar{s}}&=\sum_{\substack{r\leqslant R\\(r,q)=1}}\ \sum_{\substack{r'\leqslant R\\(r',q')=1}}\frac{|\mu(r)\mu(r')|}{r\,r'}\\&\quad\times\Big(\sum_{n\leqslant N}f_r(n)f_{r'}(n)b_n\bar{\chi}(n)\chi'(n)n^{-s'-\bar{s}}\Big)。\end{aligned}\tag{9}$$

由 § 2.2 的(13),可知

$$b_n = n^{-1}(e^{-n/x} - e^{-n}) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{K\to+\infty}\left(\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)\left(\left(\frac{n}{x}\right)^{-\omega} - n^{-\omega}\right)n^{-1}\mathrm{d}\omega\right),$$

因而

$$\sum_{n\leqslant N}f_r(n)f_{r'}(n)b_n\overline{\chi}(n)\chi'(n)n^{-s'-\bar{s}}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{K\to+\infty}\left(\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)\right.\tag{10}$$
$$\left.\cdot\left(\sum_{n\leqslant y^2}f_r(n)f_{r'}(n)\overline{\chi}(n)\chi'(n)n^{-1-s'-\bar{s}-\omega}\right)\mathrm{d}\omega\right)。$$

对于给定的 q,q',χ,χ',s,s' 及 r,r',若$(q,\chi,s)\in B$,$(q',\chi',s')\in B$,$\mu(r)\mu(r')\neq 0$,$(r,q)=1$,$(r',q')=1$,设 $\overline{\chi}(n)\chi'(n)=\chi_1(n)$ 及 $s'+\bar{s}=s_1$,则 $\chi_1(n)$ 是模$[q,q']$的特征,且由 $\mathrm{Re}s'\geqslant 0$,$\mathrm{Re}\bar{s}\geqslant 0$,可知$\mathrm{Re}s_1\geqslant 0$。我们有

$$|f_r(n)| = |f((r,n))| \leqslant \varphi((r,n)) \leqslant (r,n) \leqslant r,$$

并且,类似地可知$|f_{r'}(n)|\leqslant r'$。所以,当 $\mathrm{Re}\omega = 2$ 时,

$$\left|\sum_{n>y^2}f_r(n)f_{r'}(n)\chi_1(n)n^{-s_1-\omega-1}\right| \leqslant r\,r'\sum_{n>y^2}n^{-3} = O(r\,r'y^{-4})。$$

因此,由于$f_r(n)$、$f_{r'}(n)$及 $\chi_1(n)$ 都是积性函数,由引理1.3.1我们得

$$\sum_{n\leqslant y^2}f_r(n)f_{r'}(n)\chi_1(n)n^{-s_1-\omega-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}f_r(n)f_{r'}(n)\chi_1(n)n^{-s_1-\omega-1} + O(rr'y^{-4})$$
$$= \prod_p\left(1+\sum_{t\geqslant 1}f_r(p^t)f_{r'}(p^t)(\chi_1(p))^t p^{-t(s_1+\omega+1)}\right) + O(rr'y^{-4})。\tag{11}$$

由于 $\mu(r)\mu(r')\neq 0$，所以当 $t\geqslant 1$ 时，$f_r(p^t)=f_r(p)$，$f_{r'}(p^t)=f_{r'}(p)$。因此，若将素数 p 分成(a)、(b)、(c) 三类，这里(a)$p\nmid rr'$，(b)$p\mid(r,r')$，及(c)$p\mid rr'$ 但$p\nmid(r,r')$，则由 f 的定义可知(11) 右端的无穷乘积为

$$\prod_{p\nmid rr'}(1-\chi_1(p)p^{-g})^{-1}\prod_{p\mid(r,r')}\left(1+f^2(p)\frac{\chi_1(p)p^{-g}}{1-\chi_1(p)p^{-g}}\right)$$

$$\cdot\prod_{\substack{p\nmid rr'\\ p\mid(r,r')}}\left(1+f(p)\frac{\chi_1(p)p^{-g}}{1-\chi_1(p)p^{-g}}\right)$$

$$=L(g,\chi_1)L_1(g,\chi_1)L_2(g,\chi_1),\tag{12}$$

其中 $g=s_1+1+\omega$，

$$L_1(g,\chi_1)=\prod_{p\mid(r,r')}(1+(f^2(p)-1)\chi_1(p)p^{-g}),$$

$$L_2(g,\chi_2)=\prod_{\substack{p\mid rr'\\ p\nmid(r,r')}}(1+(f(p)-1)\chi_1(p)p^{-g})。$$

令 $\sigma=\mathrm{Re}(s_1)=\mathrm{Re}(s'+\bar{s})$，$A=2-iK$，$B=2+iK$，$C=-1/2-\sigma+iK$ 及 $D=-1/2-\sigma-iK$，并记 χ_0 为模$[q,q']$的主特征。由残数定理，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iK}^{2+iK}\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)L(g,\chi_1)L_1(g,\chi_1)L_2(g,\chi_2)\mathrm{d}\omega$$

$$=E(\chi_1,r,r',s'+\bar{s},x)+\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3),\tag{13}$$

其中 $E(\chi_1,r,r',s'+\bar{s},x)$ 在 $\chi_1\neq\chi_0$ 时为零，而在 $\chi_1=\chi_0$ 时则为函数

$$G(\omega)=\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)L(g,\chi_1)L_1(g,\chi_1)L_2(g,\chi_2)$$

在 1 阶极点 $\omega=-s_1=-(s'+\bar{s})$ 处的残数，I_1，I_2 与 I_3 分别为函数 $G(\omega)$ 沿复 ω 平面上的直线段$\overline{AD}$、$\overline{DC}$ 与$\overline{CB}$ 的积分。这里我们已注意到，$\omega=0$ 为函数

$$\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)$$

的可去奇点，因此，若 $s_1=0,\chi_1=\chi_0$，则 $\omega=0$ 仍为 $G(\omega)$ 的 1 阶极点。由定理1.2.2的(vi)可知，若 $\chi_1=\chi_0$，则 $q=q',\chi(n)=\chi'(n)$。因此，在 $\chi_1=\overline{\chi}\chi'=\chi_0$ 时，

$$\begin{aligned}G(\omega)&=\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)L(g,\chi_0)L_1(g,\chi_0)L_2(g,\chi_0)\\&=\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)\zeta(g)\prod_{p\mid q}(1-p^{-g})\prod_{\substack{p\mid[r,r']\\p\nmid(r,r')}}(1-p^{1-g})\\&\quad\cdot\prod_{p\mid(r,r')}(1+(p-2)p^{1-g})。\end{aligned}\tag{14}$$

注意，$L_2(1,\chi_0)$ 的值当 $[r,r']\neq(r,r')$ 时为 0，当 $[r,r']=(r,r')$ 时为 1，而若 $[r,r']=(r,r')$，则必 $r=r'$。由(14)及定理 1.3.5 的(ii)可得

$$E=\begin{cases}\Gamma(-s_1)(x^{-s_1}-1)\dfrac{\varphi(q)}{q}\displaystyle\prod_{p\mid r}(p-1),\\ \qquad\qquad\text{若 }\chi=\chi',q=q',r=r',s_1\neq0,\\(\log x)\cdot\dfrac{\varphi(q)}{q}\displaystyle\prod_{p\mid r}(p-1),\\ \qquad\qquad\text{若 }\chi=\chi',q=q',r=r',s_1=0,\\0,\qquad\qquad\text{否则；}\end{cases}\tag{15}$$

这里我们简记 $E=E(\chi_1,r,r',s'+\bar{s},x)$，并已注意到

$$\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\varphi(q)}{q},$$

以及

$$\lim_{\omega\to0}\Gamma(\omega)(x^{\omega}-1)=\lim_{\omega\to0}(\omega\Gamma(\omega))\cdot\lim_{\omega\to0}\left(\frac{x^{\omega}-1}{\omega}\right)=\log x。$$

接下来我们估计(13)右端的三个积分。为估计 $G(\omega)$，设 $\omega=\beta+$

it,β 与 t 为实数。设 $K > 3T$。当 $-1/2-\sigma \leqslant \beta \leqslant 2$, $|t| = K$ 时,由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma(\omega) = O(e^{-\frac{\pi}{3}K})。$$

当 $\beta = -1/2-\sigma$, $|t| \leqslant 1$ 时,由于 $0 \leqslant \sigma \leqslant 2(1-\alpha) \leqslant 1/3$,所以 $-5/6 \leqslant \beta \leqslant -1/2$, $1/6 \leqslant 1+\beta \leqslant 1/2$,因此由定理 1.1.5 的(ii) 可知

$$\Gamma(\omega) = \frac{|\Gamma(1+\omega)|}{|\omega|} \ll \Gamma(1+\beta) \ll 1。$$

当 $\beta = -1/2-\sigma$, $1 < |t| \leqslant K$ 时,由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma(\omega) = O(e^{-\frac{\pi}{3}|t|})。$$

当 $-1/2-\sigma \leqslant \beta \leqslant 2$ 时,由 $g = 1+\omega+s_1$ 可知 $1/2 \leqslant \mathrm{Re}(g) = 1+\beta+\sigma \leqslant 3+\sigma$,所以(注意:$\mu(r)\mu(r') \neq 0$)

$$\begin{aligned}
|L_1(g,\chi_1)| &\leqslant \prod_{p|(r,r')} (1+(p^2-2p)p^{-1/2}) \\
&\leqslant \prod_{p|(r,r')} p^{3/2} = (r,r')^{3/2}, \\
|L_2(g,\chi_2)| &\leqslant \prod_{\substack{p|[r,r'] \\ p\nmid(r,r')}} (1+(p-2)p^{-1/2}) \\
&\leqslant \prod_{\substack{p|[r,r'] \\ p\nmid(r,r')}} p^{1/2} = \left(\frac{[r,r']}{(r,r')}\right)^{1/2}。
\end{aligned}$$

当 $-1/2-\sigma \leqslant \beta \leqslant 2$ 时,$1/2 \leqslant \mathrm{Re}(g) \leqslant 3+\sigma$。对于给定的 q 及 q',简记 $[q,q'] = m$。并同上,设 $\chi_0(n)$ 为模 m 的主特征。当 $\chi_1 = \chi\overline{\chi} \neq \chi_0$ 时,设 χ_1 是由模 q_1 的原特征 χ'_1 诱导出的,$q_1 | m$, $q_1 \geqslant 3$。则 $\chi_1(n) = \chi_0(n)\chi'_1(n)$,

$$L(g,\chi_1) = L(g,\chi'_1)\prod_{\substack{p|m \\ p\nmid q_1}}\left(1-\frac{\chi'_1(p)}{p^g}\right)。$$

当 $-1/2-\sigma \leqslant \beta \leqslant 2, |t| = K$ 时，由 $g = 1+\omega+s_1, \mathrm{Re}s = \sigma, |\mathrm{Im}s_1| \leqslant 2T < K$，可知 $1/2 \leqslant \mathrm{Re}(g) \leqslant 3+\sigma, |\mathrm{Im}g| \ll K$，所以由定理 1.3.6 的(i) 可得

$$L(g,\chi_1') = O((q_1K)^{1/4}\cdot\log(q_1K))$$
$$= O((mK)^{1/4}\log(mK)),$$
$$L(g,\chi_1) = O((mK)^{1/4}\log(mK)F(m)),$$

这里我们简记 $F(m) = \prod\limits_{p|m}(1+p^{-1/2})$。当 $\beta = -1/2-\sigma, \mathrm{Re}g = 1/2$ 时，若 $|t| \leqslant 1$，则 $\mathrm{Im}g = O(T)$，

$$L(g,\chi_1') = O((q_1T)^{1/4}\log(q_1T)),$$
$$L(g,\chi_1) = O((mT)^{1/4}\log(mT)\cdot F(m)),$$

而若 $1 < |t| \leqslant K$，则因 $\mathrm{Im}g = O(|t|+T)$，我们有

$$L(g,\chi_1') = O((q_1(|t|+T))^{1/4}\log(q_1(|t|+T))),$$
$$L(g,\chi_1) = O((m(|t|+T))^{1/4}\log(m(|t|+T))F(m))。$$

综合这些结论，当 $-1/2-\sigma \leqslant \beta \leqslant 2, |t| = K$ 时，

$$G(\omega) = O(x^2e^{-\pi K/3}(r,r')[r,r']^{1/2}(mK)^{1/4}\log(mK)\cdot F(m)),$$

当 $\beta = -1/2-\sigma, |t| \leqslant 1$ 时，

$$G(\omega) = O(x^{-1/2-\sigma}(mT)^{1/4}\log(mT)\times F(m)\cdot(r,r')[r,r']^{1/2}),$$

当 $\beta = -1/2-\sigma, 1 < |t| \leqslant K$ 时，

$$G(\omega) = O(x^{-1/2-\sigma}(m(|t|+T))^{1/4}e^{-\pi|t|/3}\log(m(|t|+T))\times F(m)(r,r')[r,r']^{1/2})。$$

于是，我们得

$$I_1, I_3 = O(x^2e^{-\pi K/3}(mK)^{1/4}\log(mK)F(m)[r,r']^{1/2}(r,r')), \tag{16}$$

$$I_2 = O(x^{-1/2-\sigma}[r,r']^{1/2}(r,r')m^{1/4}F(m)\times$$

$$(\int_0^1 T^{1/4}\log(mT)\mathrm{d}t+\int_1^T T^{1/4}e^{-\pi t/3}\log(mT)\mathrm{d}t$$
$$+\int_T^K t^{1/4}\log(mt)e^{-\pi t/3}\mathrm{d}t))$$
$$=O(x^{-1/2-\sigma}[r,r']^{1/2}(r,r')(mT)^{1/4}\log(mT)F(m))。\tag{17}$$

由(10) ~ (13),(16) 及(17),可知

$$\sum_{n\leqslant N}f_r(n)f_{r'}(n)b_n\overline{\chi}(n)\chi'(n)n^{-s'-\bar{s}}$$
$$=E(\overline{\chi}\chi',r,r',s'+\bar{s},x)+O(x^{-\frac{1}{2}-\sigma}[r,r']^{1/2}\times$$
$$(r,r')(mT)^{1/4}\log(mT)F(m))+O(rr'x^2y^{-4}),\tag{18}$$

这里 E 由(15) 给出,$m=[q,q']$,$F(m)=\prod_{p\mid m}(1+p^{-1/2})$,并且我们已用到了由定理 1.1.5 可得的估计:对充分大的 K,

$$\int_{-K}^K|\Gamma(2+it)|\mathrm{d}t=\int_{-1}^1|\Gamma(2+it)|\mathrm{d}t+\int_1^K|\Gamma(2+it)|\mathrm{d}t$$
$$+\int_{-K}^{-1}|\Gamma(2+it)|\mathrm{d}t$$
$$=O(1)+O(\int_1^K e^{-\pi t/3}\mathrm{d}t)=O(1)。$$

由(9)、(15) 及(18),可得

$$\sum_{n\leqslant N}b_n\lambda_{n,q}\lambda_{n,q'}\overline{\chi}(n)\chi'(n)n^{-s'-\bar{s}}$$
$$=\sum_{\substack{r\leqslant R\\(r,q)=1}}\sum_{\substack{r'\leqslant R\\(r',q')=1}}\frac{|\mu(r)\mu(r')|}{rr'}E(\overline{\chi}\chi',r,r',s'+\bar{s},x)$$
$$+O(x^{-1/2}(mT)^{1/4}F(m)\log(mT)\Delta_1)+O(R^2y^{-4}x^2)$$
$$=\sum_{\substack{r\leqslant R\\(r,q)=1}}\frac{|\mu(r)|}{r^2}\prod_{p\mid r}(p-1)\cdot E_1(x,\chi,\chi',s'+\bar{s})$$
$$+O(x^{-1/2}(mT)^{1/4}F(m)\log(mT)R)+O(R^2y^{-4}x^2);$$

其中用到

$$\Delta_1=\sum_{r\leqslant R}\sum_{r'\leqslant R}\frac{(r,r')[r,r']^{1/2}}{rr'}=\sum_{r\leqslant R}\sum_{r'\leqslant R}(rr')^{-1/2}(r,r')^{1/2}$$
$$\ll\sum_{d\leqslant R}d^{-1/2}\Big(\sum_{r\leqslant R/d}n^{-1/2}\Big)^2\ll R\sum_{d\leqslant R}d^{-3/2}\ll R,$$

而

$$E_1(x,\chi,\chi',s'+\bar{s})=\begin{cases}\log x, & \text{若 } q=q',\chi=\chi',s+\bar{s}'=0,\\ \Gamma(-s'-\bar{s})(x^{-s'-\bar{s}}-1), & \text{若 } q=q',\chi=\chi',s+\bar{s}'\neq 0,\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

因此,由 $\prod_{p|r}(p-1)=\varphi(r)\leqslant r$, $m\leqslant Q^2$, $F(m)\leqslant\prod_{p|m}2\leqslant\tau(m)\ll Q^{\varepsilon/4}$(见引理 2.3.2 的(ii)),(3),以及引理 2.3.2 的(xii),我们有

$$\sum_{(q,\chi,s)\in B}\;\sum_{(q',\chi',s')\in B}\Big|\sum_{n\leqslant N}b_n\bar{\lambda}_{n,q}\lambda_{n,q'}\bar{\chi}(n)\chi'(n)n^{-s'-\bar{s}}\Big|$$
$$\ll\sum_{(q,\chi,s)\in B}\Big(\sum_{r\leqslant R}\frac{1}{r}\Big)\log x+\sum_{(q,\chi,s)\in B}\Big(\sum_{r\leqslant R}\frac{1}{r}\Big)\sum_{s'}|x^{-s'-\bar{s}}-1|\times$$
$$|\Gamma(-\bar{s}-s')|+J^2(x^{-\frac{1}{2}}(Q^{2+\varepsilon}T)^{\frac{1}{4}}LR+R^2y^{-4}x^2)$$
$$\ll L^2J+L\cdot\sum_{(q,\chi,s)\in B}\;\sideset{}{_1}\sum_{s'}|x^{-s'-\bar{s}}-1|\,|\Gamma(-\bar{s}-s')|$$
$$+J^2(x^{-1/2}(Q^{2+\varepsilon}T)^{1/4}LR+R^2y^{-4}x^2),\tag{19}$$

其中 $\sideset{}{_1}\sum_{s'}$ 表示对于满足 $(q,\chi,s')\in B$ 且 $\bar{s}+s'\neq 0$ 的 s' 求和。

当 $(q,\chi,s)\in B$, $(q,\chi,s')\in B$, $s'\neq-\bar{s}$ 时,

$$0\leqslant\operatorname{Re}(\bar{s}+s')\leqslant 2(1-\alpha),$$
$$\frac{2}{3}\leqslant 1-2(1-\alpha)\leqslant\operatorname{Re}(1-(\bar{s}+s'))\leqslant 1,$$

因此,由定理 1.1.5 的(i) 及(ii),我们总有估计

$$|(\bar{s}+s')\Gamma(-(\bar{s}+s'))|$$

$$= |\Gamma(1-(\bar{s}+s'))| \leqslant \Gamma(1)=1。\tag{20}$$

而且，当 $|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')| \geqslant 1$ 时，由定理 1.1.5 的(iv) 还有

$$|\Gamma(-(\bar{s}+s'))| \ll e^{-\frac{\pi}{3}|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')|}。\tag{21}$$

对于固定的 $(q,\chi,s)\in B$，我们将(19) 中的求和 $\sum_{s'}{}_1$ 拆成三部分 $\sum_{11}$，$\sum_{12}$ 及 $\sum_{13}$，分别相应于 $\sum_{s'}{}_1$ 中满足 $\mathrm{Im}(\bar{s}+s')=0$，$0<|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')|\leqslant 3L$ 及 $|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')|>3L$ 的部分。若 s' 被计数于 $\sum_{11}$ 中，则由 B 的构造，唯一可能出现的情况是 $s=s'=\rho_v-\alpha$ 对某个 $v(1\leqslant v\leqslant K(q,\chi))$ 成立，并且此时 $\mathrm{Re}(\rho_v-\alpha)\neq 0$(否则 $s'+\bar{s}=0$ 了)。由于这时 $\bar{s}+s'$ 为实数，我们有

$$|x^{-s'-\bar{s}}-1| = \left|\int_0^{\bar{s}+s'} e^{-u\log x}\mathrm{d}u\right|\log x \leqslant (\bar{s}+s')\log x,$$

因此，由(20) 可得

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{11}|x^{-s'-\bar{s}}-1||\Gamma(-\bar{s}-s')|\\&\ll \log x|\Gamma(1-(\bar{s}+s'))| \ll L。\end{aligned}\tag{22}$$

进一步将 $\sum_{12}$ 拆成两部分 $\sum_{121}$ 及 $\sum_{122}$，分别相应于 $\sum_{12}$ 中 s' 满足 $\mathrm{Im}s'>\mathrm{Im}s$ 及 $\mathrm{Im}s'<\mathrm{Im}s$ 的部分。当 s' 被计数于 $\sum_{121}$ 且 $\mathrm{Im}s'>\mathrm{Im}s$ 时，存在至多 p 个互不相交的形如(2) 的小区域 $D_{t(1)}$，$\cdots$，$D_{t(p)}$，$p=O(L^2)$，使得 s' 必落入某个 $D_{t(j)}$ 之中，且当 $s'\in D_{t(j)}$ 时，$\mathrm{Im}s'-\mathrm{Im}s\geqslant \frac{j}{L}$，$j\geqslant 1$。于是，由(20) 可得(用到引理 2.3.2 的(i))

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{121}|x^{-\bar{s}-s'}-1||\Gamma(-\bar{s}-s')| \ll \sum\nolimits_{121}|\Gamma(-\bar{s}-s')|\\&\ll \sum\nolimits_{121}\frac{|\Gamma(1-\bar{s}-s')|}{|\bar{s}+s'|} \ll \sum_{1\leqslant j\leqslant p}\frac{L}{j} \ll L\cdot\log L。\end{aligned}\tag{23}$$

同样地可得

$$\sum\nolimits_{122}|x^{-\bar{s}-s'}-||\Gamma(-\bar{s}-s')| \ll L\cdot\log L。\tag{24}$$

若 s' 被计数于 $\sum_{13}$ 中,则 $|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')|>3L$,因而由(21)可知

$$|\Gamma(-(\bar{s}+s'))| \ll e^{-\frac{\pi}{3}(3L)} \ll (QT)^{-3}。$$

因为当 $(q,\chi,s')\in B$ 且 q 及 χ 已给定时,s' 的个数 $\leqslant K(q,\chi)=O(TL)$,所以

$$\sum_{13}|(x^{-\bar{s}-s'}-1)||\Gamma(-\bar{s}-s')|$$

$$\ll \sum_{13}|\Gamma(-\bar{s}-s')| \ll (QT)^{-3}TL = O((QT)^{-1})。\quad (25)$$

由(3),(22)～(25),我们得

$$\sum_{(q,\chi,s)\in B}\sum_{s'}{}_1|(x^{-\bar{s}-s'}-1)\Gamma(-\bar{s}-s')| \ll JL\cdot\log L。(26)$$

由(5)、(8)、(19)及(26),可得

$$\left(\sum_{(q,\chi,s)\in B}\left|\sum_{2\leqslant n\leqslant y}a(n)\chi(n)n^{-s-\alpha}e^{-n/x}\left(\sum_{\substack{r\leqslant R\\(r,q)=1}}\frac{|\mu(r)|}{r}f_r(n)\right)\right|\right)^2$$

$$\ll J\cdot y^{2-2\alpha}L^2\log L + J^2y^{1/3}(x^{-1/2}(Q^{2+\varepsilon}T)^{1/4}LR + R^2y^{-4}x^2)$$

$$\ll J\cdot y^{2-2\alpha}L^2\log L + J^2。\quad (27)$$

由引理2.3.2的(xvi)、(ii)及引理2.4.2的(ii),可知当 $q\leqslant Q$ 时,

$$\sum_{\substack{r\leqslant R\\(r,q)=1}}\frac{|\mu(r)|}{r} \geqslant \frac{1}{\zeta(2)}\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}(\log R+c_1)+O(R^{-2/5+\varepsilon})$$

$$\gg \frac{\log R}{\log\log(3Q)} \gg \frac{L}{\log L}。$$

因此,由(4)及(27),我们得

$$\frac{L^2}{(\log L)^2}\cdot J^2 \ll \left(\sum_{(q,\chi,s)\in B}\left(\sum_{\substack{(r,q)=1\\r\leqslant R}}\frac{|\mu(r)|}{r}(1+O(L^{-1}))\right)\right)^2$$

$$\ll J\cdot y^{2-2\alpha}L^2\log L + J^2。$$

所以

$$J^2\cdot L^2(\log L)^{-2} \ll J\cdot y^{2-2\alpha}L^2\log L,$$

$$J \ll y^{2-2\alpha}(\log L)^3。\quad (28)$$

由于

$$(1-\alpha)L \ll e^{\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)\log(Q^2T)} = (Q^2T)^{\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)},$$

由(3) 与(28) 就得到估计

$$A^{(0)}(\alpha,T,Q) \ll (Q^2T)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log L)^2。$$

类似地,我们可得到

$$A^{(1)}(\alpha,T,Q) \ll (Q^2T)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log L)^2。$$

因此

$$A(\alpha,T,Q) \leqslant A^{(0)}(\alpha,T,Q) + A^{(1)}(\alpha,T,Q) \ll (Q^2T)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log L)^3。$$

证毕。

注意:迄今为止无论采用 Turán、Gallagher、Jutila、Motohashi 或陈景润的方法都无法将定理 2.4.3 中的 loglog 型因子去掉(这些人的工作中都有错,[16] 中的相关的处理也如此,因此[14] 等文中关于 Glodbach 问题例外集的结果是证不出的)。

练　　习

(Ⅰ)应用引理2.3.2的(xvi)与 §1.6的练习(Ⅱ),在证明定理2.4.3 方法的基础上,证明若将 $\lambda_{n,q}$ 的定义换成($f_r(n)$ 的定义不变)

$$\lambda_{n,q} = \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{r\leqslant R \\ (r,q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n), n \geqslant 1,$$

则可将定理 2.4.3 中的$(\log\log QT)^3$ 改进为$(\log\log QT)^{3/2}$。

§2.5 ζ 函数的零点密度估计

在本节中,我们要用类似于上节中的方法,导出关于 ζ 函数

的类似的零点密度估计。设 $T \geqslant 3, 5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1$,用 $N(\alpha, T)$ 表示 ζ 函数的满足条件

$$\alpha \leqslant \mathrm{Re}\rho \leqslant 1, |\mathrm{Im}\rho| \leqslant T$$

的零点 ρ 的个数,这里同样的零点是几阶就被重复计数几次。在定理 2.2.2 中取 $q = 1, \chi(n) \equiv 1 (n \geqslant 1), f(n) = \mu(n)\varphi(n)$,则对 $\zeta(s)$ 的任一满足 $\rho = u + ib, 5/6 \leqslant u \leqslant 1$ 及 $|b| \leqslant T$ 的零点 ρ,我们有

$$\begin{aligned} & e^{-1/x} + \sum_{2 \leqslant n \leqslant y} a(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \\ = & \Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} M((\xi_d), 1, f, r, \rho, 1-\rho) \\ & + O(x^{1/2-\alpha} r z^{1/2}), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x > z \geqslant 3, y = x(\log x)^2$, r 为正整数, $r \leqslant R, R \geqslant 3$, $\{\xi_d\}$ 为任一组满足 $\xi_1 = 1$ 和 $|\xi_d| \leqslant |\mu(d)|$,以及当 $d > z$ 时 $\xi_d = 0$ 的实数,而

$$a(n) = \sum_{d \mid n} \xi_d。$$

我们仍选取

$$\xi_d = \begin{cases} \mu(d) \dfrac{\log(z/d)}{\log z}, & d \leqslant z, \\ 0, & d > z。 \end{cases}$$

令 $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$,设 T 充分大,使得 $T^{\varepsilon} > 3$,并取

$$R = z = T^{\varepsilon}, \quad x = T^{\frac{7}{4}(1-\varepsilon)}。$$

若 $|\mathrm{Im}\,\rho| \geqslant (\log T)^2$,则由定理 1.1.5 的(iv)可知

$$\Gamma(1-\rho) = O(e^{-\frac{\pi}{3}(\log T)^2})。$$

又因为

$$M((\xi_d), 1, f, r, \rho, 1-\rho) = \sum_{d \leqslant z} \xi_d f_r(d) d^{-1} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} (1 + p^{-1}(f(p) - 1))$$

$$= \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \equiv 0 (\bmod r)}} \xi_d f_r(d) d^{-1}$$

$$= \Big(\sum_{\substack{d \leqslant z \\ r \mid d}} \frac{\mu(d) \log(z/d)}{d} \Big) \frac{f(r)}{\log z}$$

$$= \frac{\varphi(r) \mid \mu(r) \mid}{r \cdot \log z} \Big(\sum_{\substack{m \leqslant z/r \\ (m,r)=1}} \frac{\mu(m)}{m} \log \frac{z}{mr} \Big)$$

$$= O\Big(\sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} \Big) = O(\log z),$$

所以这时

$$\Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} M((\xi_d), 1, f, r, \rho, 1-\rho) = O(T^{-\varepsilon})。\tag{2}$$

由(1) 与(2) 得

$$1 + O(T^{-\varepsilon}) = - \sum_{2 \leqslant n \leqslant y} a(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x}。\tag{3}$$

基于(3),我们可证明关于 ζ 函数的零点密度估计:

定理 2.5.1　设 $T \geqslant 3, 5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $N(\alpha, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = u + iv, \alpha \leqslant u \leqslant 1$ 及 $|v| \leqslant T$ 的所有非平凡零点的个数(k 阶零点被重复计数 k 次,$k \geqslant 1$),则

$$N(\alpha, T) \ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} (\log \log 3T)^3。$$

为证明定理 2.5.1,先证明一个引理。

引理 2.5.2　设 $s_0 = 2 + it_0$, t_0 为实数,$d > 0$, $M(d, s_0)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $|s - s_0| \leqslant d$ 的非平凡零点个数(k 阶零点被重复计数 k 次),则

$$M(d, s_0) = O(d \log(|t_0| + 2)) + O(1)。$$

证明:可应用推论 1.4.9,与引理 2.4.1 类似地加以证明。**证毕。**

定理 2.5.1 的证明:令 $L = \log T$,

$$D = \{ s \mid s = u + it, \alpha \leqslant u \leqslant 1, L^2 \leqslant |t| \leqslant T \},$$

$$D_r = \{ s \mid s = u + it, \alpha \leqslant u \leqslant 1,$$

$$rL^{-1} \leqslant |t| \leqslant (r+1)L^{-1}\} \cap D,$$

其中 r 为整数。存在唯一的正整数 $Y,\frac{TL}{2} \leqslant Y < \frac{1}{2}(LT+2)$,使得

$$(2Y-2)L^{-1} < T \leqslant 2YL^{-1}。$$

若令

$$D^{(0)} = \bigcup_{\substack{|r| \leqslant 2Y \\ 2 \mid r}} D_r, D^{(1)} = \bigcup_{\substack{|r| \leqslant 2Y+1 \\ 2 \nmid r}} D_r,$$

则 $D \subseteq D^{(0)} \cup D^{(1)}$。我们用 $N(\alpha, T_1, T_2)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足

$$\rho = u + iv, \alpha \leqslant u \leqslant 1, T_1 \leqslant |v| \leqslant T_2$$

的非平凡零点的个数,这里 $0 < T_1 < T_2$。于是,

$$N(\alpha, T, L^2) \leqslant N^{(0)}(\alpha, T, L^2) + N^{(1)}(\alpha, T, L^2),$$

此处 $N^{(j)}(\alpha, T, L^2)$ 为 $\zeta(s)$ 的属于 $D^{(j)}$ 的零点个数(k 阶零点就被重复计算 k 次,$k \geqslant 1$),$j = 0,1$。由定理1.5.8,可知存在正的绝对常数 c,使得当 $1 - \alpha \leqslant cL^{-1}$ 时,$N(\alpha, T, L^2) = 0$。为此我们可设 T 充分大,且

$$\frac{1}{6} \geqslant 1 - \alpha > cL^{-1}。$$

我们估计 $N^{(0)}(\alpha, T, L^2)$。对每个 $r, 2 \mid r, |r| \leqslant 2Y, D_r$ 中或至少含有 $\zeta(s)$ 的一个零点,或不含有 $\zeta(s)$ 的任何零点。令

$$A = \{r \mid 2 \mid r, |r| \leqslant 2Y, D_r \text{ 中至少含有一个 } \zeta(s) \text{ 的零点}\}。$$

不妨设 A 中共有 K 个整数,$1 \leqslant K = O(Y) = O(LT)$,记为 $r(1), \cdots, r(K)$。我们在每个 $D_{r(v)}$ 中取定一个 $\zeta(s)$ 的零点 ρ_v,$1 \leqslant v \leqslant K$,并设 $\rho_v = \sigma_v + it_v, s_v = 1 + it_v, L^2 \leqslant |t_v| \leqslant T$。当 $s \in D_{r(v)}$ 时,

$$|s - s_v| \leqslant \sqrt{(1-\alpha)^2 + L^{-2}} \leqslant (1-\alpha)(1 + c^{-2})^{\frac{1}{2}},$$

所以若用 N_v 记 $D_{r(v)}$ 中零点的个数(一个零点是几阶就被重复计数几次),$1 \leqslant v \leqslant K$,则由引理 2.5.2,我们有

$$N^{(0)}(\alpha, T, L^2) = \sum_{1 \leqslant v \leqslant K} N_v \ll K \cdot (1 + (1-\alpha)L)。\tag{4}$$

我们来估计 K。令

$$P=\sum_{1\leqslant v\leqslant K}\Big(\sum_{2\leqslant n\leqslant y}a(n)\Big(\sum_{r\leqslant R}\frac{|\mu(r)|f_r(n)}{r}\Big)n^{-\rho_v}e^{-n/x}\Big),\tag{5}$$

则由(3)可得

$$P=-\Big(\sum_{r\leqslant R}\frac{|\mu(r)|}{r}\Big)K(1+O(T^{-\varepsilon}))。\tag{6}$$

我们可与 §2.4 的(5)～(27)中类似地估计 P,并且这时的情况相当于"$q=q'=1,\chi(n)=\chi'(n)=1(n\geqslant 1)$"这种非常简单的情况。于是,相应于 §2.4 的(27),我们得到

$$P^2\ll K\cdot y^{2-2\alpha}L^2\log L+K^2。\tag{7}$$

由(6)、(7),以及引理 2.3.2 的(xvi),可得

$$K^2L^2\ll K\cdot y^{2-2\alpha}L^2\log L+K^2,$$

所以

$$K^2\ll K\cdot y^{2-2\alpha}\log L,K\ll y^{2-2\alpha}\cdot\log L。\tag{8}$$

因为

$$1+(1-\alpha)L\ll e^{\varepsilon^2(1-\alpha)L}\ll T^{\varepsilon^2(1-\alpha)},$$

所以由(4)及(8),我们得到估计

$$N^{(0)}(\alpha,T,L^2)\ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}\log\log(3T)。$$

用类似的方法也可得

$$N^{(1)}(\alpha,T,L^2)\ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}\log\log(3T)。$$

因此

$$N(\alpha,T,L^2)\ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}\log\log(3T)。\tag{9}$$

若用 L^2 代 T(设 T 充分大),则由(9)给出

$$N(\alpha,L^2,4(\log L)^2)\ll(\log T)^{7(1-\alpha)}\log\log\log(9T)。\tag{10}$$

由(9)与(10)可得

$$N(\alpha,T,4(\log L)^2)\ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}\log\log(3T)。\tag{11}$$

由定理 1.5.11 的(iii)的(b),可知满足 $|\mathrm{Im}\rho|\leqslant 4(\log L)^2$ 的 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的个数

$$\ll (\log L)^2 \log(4(\log L)^2) \ll (\log\log 3T)^3 。$$

所以由(11)可得定理2.5.2的结论。**证毕**。

练　　习

(I) 证明若 $\frac{3}{4} < \alpha \leqslant 1$，则当 $T \geqslant 3, c(\alpha) = \frac{1}{4\alpha - 3}$ 时，

$$N(\alpha, T) \ll T^{c(\alpha)(1-\alpha)}(\log\log 3T)^3 。$$

第三章

BDH 均值和

§3.1 引　　言

我们把下面的均值和称为 BDH(Barban-Davenport-Halberstam) 均值和:

$$S(Q,x) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \left(\psi(x;q,a) - \frac{1}{\varphi(q)}\psi(x,\chi_q^0)\right)^2,$$

其中 $x \geqslant Q \geqslant 3$,

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a (\mathrm{mod}\ q)}} \Lambda(n), \psi(x,\chi_q^0) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi_q^0(n),$$

$\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数,$\chi_q^0(n)$ 为模 q 主特征,$\varphi(q)$ 为 Euler 函数。

自 1963 年起,应用大筛法和“Siegel 定理”,Barban、Davenport、Halberstam、Gallagher、Montgomery 以及 Hooley 都曾研究过 $S(Q,x)$ 的上界与渐近公式。我们认为“Siegel 定理”不仅是一种非实效的语言游戏,而且在其证明中含有严重的逻辑错误,故这些数学家的工作其实都仅有很小的价值,而若我们采用 Davenport 的书[2]中 §29 中的方法,则由于在 p. 171 上 Q_1 至多可取为$(\log x)^{2-\delta}$(对充分小的正数 δ;参见我们书中的定理 1.5.13

以及[2]的 §20 中的 p.123 上的讨论),因此,仅当

$$x(\log x)^{-1+\delta} \leqslant Q \leqslant x \tag{0}$$

时,我们才能获得形如

$$S(Q,x) \ll xQ\log x \tag{1}$$

的上界估计。

我们将在 §3.2 中对 $S(Q,x)$ 的下界进行深入研究,我们所用的创造性方法是对经典的圆法加以变化而来的,并且我们还要用到大筛法和 L 函数的零点密度估计。为了回避使用证明起来较为坚涩的“Gallagher 引理”(其证明要用到实分析 L^2 理论中的 Plancherel 定理),我们在 §3.2 中特别设计了一种初等的处理方法。在 §3.3 中,我们将获得 $S(Q,x)$ 的显含 L 函数“例外零点”的一个渐近展开式;作为其推论,我们既可在 Q 对 x 的某些范围内获得更为精密的下界估计,又可在 Q 对 x 的某些范围内获得 $S(Q,x)$ 的渐近公式。§3.3 中的公式表明:若要获得当 $Q<x$ 且 Q 位于范围(0)之外时的形如(1)的上界估计,就必须对 L 函数的“例外零点”的上界作进一步的假设;这实际上解决了一个长期悬而未决的问题,即能否在不对 L 函数的“例外零点”作额外假设的情况下,无条件地使得当 $Q(Q<x)$ 位于较大变化变化范围时上界估计(1)仍成立。§3.3 中的工作不仅要用到圆法(即所谓“Hardy-Littlewood 方法”)中的一些处理方法以及 L 函数的零点密度估计方法,还要处理某些形式上十分复杂的求和。

§3.2 BDH 均值和的下界

在本节中我们要证明下述结果:

定理 3.2.1 设 c 为一个适当小的正数，x 充分大，且

$$x\exp\left(\frac{-c\log x}{\log\log x}\right) \leqslant Q \leqslant x,$$

则

$$S(Q,x) \geqslant \frac{1}{2}(1+O(c))Qx\log x。$$

这个结果已改进了[9] 中的相应结果。我们先证明两个引理。

引理 3.2.2 设 $\tau \geqslant 3$，则对任意实数 α，都存在整数 a 及 q，$(a,q)=1, 1 \leqslant q \leqslant \tau$，使得(注意：$a$ 有可能等于 0，这时 $q=1$)

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}。$$

证明：考虑 $k=[\tau]+1$ 个属于区间$[0,1)$中的数 $m\alpha-[m\alpha]$，$1 \leqslant m \leqslant k$。若其中有一个数 $m_1\alpha-[m_1\alpha]$ 落在区间$[0,\frac{1}{k}]$中，则由

$$0 \leqslant m_1\alpha - [m_1\alpha] \leqslant \frac{1}{k},$$

可得

$$\left|\alpha - \frac{[m_1\alpha]}{m_1}\right| \leqslant \frac{1}{m_1 k} < \frac{1}{m_1\tau},$$

因此，若设$\frac{[m_1\alpha]}{m_1} = \frac{a}{q}, q \geqslant 1, (a,q)=1$，则有

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}, 1 \leqslant q \leqslant \tau。$$

设 k 个数$\alpha-[\alpha],\cdots,k\alpha-[k\alpha]$中没有一个落入区间$[0,1/k]$中。将区间$(\frac{1}{k},1]$分成 $k-1$ 个等份，即

$$\left(\frac{1}{k},1\right] = \left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right] \cup \left(\frac{2}{k},\frac{3}{k}\right] \cup \cdots \cup \left(\frac{k-1}{k},1\right],$$

则必有两个数 $m_2\alpha-[m_2\alpha]$ 与 $m_3\alpha-[m_3\alpha]$ 落入同一个小区间

$(\frac{i}{k},\frac{i+1}{k}]$ 中，$1 \leqslant i \leqslant k-1$，这里 $1 \leqslant m_2 < m_3 \leqslant k$。因此

$$|(m_3\alpha - [m_3\alpha]) - (m_2\alpha - [m_2\alpha])| < \frac{1}{k},$$

$$|\alpha - \frac{[m_3\alpha] - [m_2\alpha]}{m_3 - m_2}| < \frac{1}{(m_3 - m_2)k}。$$

此时，若设 $\frac{[m_3\alpha] - [m_2\alpha]}{m_3 - m_2} = \frac{a}{q}, (a, q) = 1, q \geqslant 1$，$q \mid (m_3 - m_2)$，则仍有

$$|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q\tau}, 1 \leqslant q \leqslant \tau。$$

证毕。

引理 3.2.3 设 $X \geqslant 3$，则

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{1}{\varphi(n)} = c_1 \log X + \gamma c_1 - c_2 + O(\frac{(\log X)^2}{X}),$$

这里 γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii))，而

$$c_1 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)}, c_2 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|\log d}{d\varphi(d)d}。$$

证明：对于正整数 n，由 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的值及引理2.3.3的(i)，我们有

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n}\prod_{p \mid n}(1 - \frac{1}{p})^{-1} = \frac{1}{n}\prod_{p \mid n}(1 + (1 - (1 - \frac{1}{p})^{-1})\mu(p))$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{d \mid n}\mu(d)\prod_{p \mid d}(1 - (1 - \frac{1}{p})^{-1})。$$

所以，交换求和并应用引理 2.3.2 的(xii)，可得

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{d \leqslant X} \frac{\mu(d)}{d}\prod_{p \mid d}(1 - (1 - \frac{1}{p})^{-1})(\sum_{m \leqslant X/d} \frac{1}{m})$$

$$= (\log X + \gamma)\sum_{d \leqslant X} \frac{\mu(d)}{d}\prod_{p \mid d}(1 - (1 - \frac{1}{p})^{-1})$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{d\leqslant X}\frac{\mu(d)\log d}{d}\prod_{p\mid d}(1-(1-\frac{1}{p})^{-1})\\
&+O(\frac{1}{X}\sum_{d\leqslant X}|\mu(d)|\prod_{p\mid d}|1-(1-\frac{1}{p})^{-1}|)\\
=\ &c_1(\log X+\gamma)-c_2+O(\log X\cdot\sum_{d>X}\frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)})\\
&+O(\sum_{d>X}(\frac{|\mu(d)|\log d}{d\varphi(d)})+O(\frac{1}{X}\sum_{d\leqslant X}\frac{|\varphi(d)|}{\varphi(d)});
\end{aligned}
$$

这里我们已用到:当 $\mu(d)\neq 0$ 时(此时 d 是不同素数的乘积)

$$\prod_{p\mid d}|1-(1-\frac{1}{p})^{-1}|=\prod_{p\mid d}\frac{1}{p-1}=\prod_{p\mid d}\frac{1}{\varphi(p)}=\frac{1}{\varphi(d)}。$$

应用引理 2.4.2 的(iii) 可得(又参见 §1.6 的(5) 式)

$$
\begin{aligned}
\log X\cdot\sum_{d>X}\frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)}&\ll\sum_{d>X}\frac{|\mu(d)|\log d}{d\varphi(d)}\ll\sum_{d>X}\frac{(\log d)^2}{d^2}\\
&\ll\sum_{d=[X]}^{\infty}\int_d^{d+1}\frac{(\log u)^2}{u^2}\mathrm{d}u\ll\int_{[X]}^{\infty}\frac{(\log u)^2}{u^2}\mathrm{d}u\\
&\ll\frac{(\log X)^2}{X}。
\end{aligned}
$$

由引理 2.3.2 的(viii),可知

$$\sum_{d\leqslant X}\frac{|\mu(d)|}{\varphi(d)}\ll\log X。$$

因此,引理 3.2.3 成立。**证毕。**

其实在证明定理 3.2.1 时,我们只需要由引理 3.2.3 产生的上界估计:

$$\sum_{n\leqslant X}\frac{1}{\varphi(n)}\ll\log X,$$

但引理 3.2.3 中确立的渐近公式将在 §3.3 中用到。

一个定义在有限区间$[a,b]$上的函数 $f(x)$(可能取复值)被称为是有界变差的,是指对$[a,b]$的任何一组分点 $x_i,0\leqslant i\leqslant$

$N+1$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b,$$

求和

$$\sum_{i=0}^{N} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

都有一个一致的上界 M。我们有

引理 3.2.4　若 $f(x)$ 为有限区间 $[a,b]$ 上的实值有界变差函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的。

证明:任取 $[a,b]$ 的一组分点 $x_0, x_1, \cdots, x_{N+1}$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

令 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$。按定义,只要证明,当 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}(\Delta x_i) \to 0$ 时,

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant N} (\omega_i - \xi_i)\Delta x_i \to 0,$$

这里

$$\omega_i = \sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x), \delta_i = \inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x)。$$

由假设不难验证 ω_i 和 δ_i 都是有限的数(事实上,可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致有界的)。任取小正数 ε,按定义,存在 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$,$\xi'_i \in [x_i, x_{i+1}]$,使得

$$\omega_i - \frac{\varepsilon}{2} < f(\xi_i), \delta_i + \frac{\varepsilon}{2} > f(\xi'_i),$$

因此

$$0 \leqslant \omega_i - \delta_i < \varepsilon + f(\xi_i) - f(\xi'_i) \leqslant \varepsilon + |f(\xi_i) - f(\xi'_i)|,$$

$$0 \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant N} (\omega_i - \delta_i)\Delta x_i \leqslant \varepsilon(b-a) + \max_{0\leqslant i\leqslant N}(\Delta x_i)\Big(\sum_{0\leqslant i\leqslant N} |f(\xi_i) - f(\xi'_i)|\Big)。$$

无妨设 $\xi_i \leqslant \xi'_i$。在 $[a,b]$ 的分点 x_i 与 x_{i+1} 之间加入 ξ_i 与 ξ'_i,将全体分点 $x_0, \xi_0, \xi'_0, x_1, \cdots, x_i, \xi_i, \xi'_i, x_{i+1}, \cdots, x_{N+1}$ 记为 $y_0, y_1, \cdots, y_{K+1}$。则因 f 是有界变差函数,必有常数 $M > 0$,使得

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant N}|f(\xi_i)-f(\xi_i')|\leqslant\sum_{0\leqslant i\leqslant K}|f(y_{i+1})-f(y_i)|\leqslant M。$$

所以我们得到

$$0\leqslant\sum_{0\leqslant i\leqslant N}(\omega_i-\delta_i)\Delta x_i\leqslant\varepsilon(b-a)+M\cdot\max_{0\leqslant i\leqslant N}(\Delta x_i)。$$

由于 ε 是任意的正数,令 $\varepsilon\to 0$,可得

$$0\leqslant\sum_{0\leqslant i\leqslant N}(\omega_i-\delta_i)\Delta x_i\leqslant M\cdot\max_{0\leqslant i\leqslant N}(\Delta x_i)。$$

因此,在 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}(\Delta x_i)\to 0$ 时,

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant N}(\omega_i-\delta_i)\Delta x_i\to 0。$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的。**证毕。**

引理 3.2.5 设 $A>0$,λ 为实数,并令

$$\int_{-A}^{A}\frac{\sin(\lambda t)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\sin(\lambda t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{\sin(\lambda t)}{t}\mathrm{d}t=F(\lambda,A)。$$

(关于极限的存在性,见定理 2.2.1 的(i))则

(i) 当 $\lambda=0$ 时,$F(A,\lambda)=0$。

(ii) 当 $|\lambda|\geqslant 1$ 时,$F(A,\lambda)=\frac{\lambda}{|\lambda|}\pi+O\left(\frac{1}{|\lambda|A}\right)$。

(iii) 当 $0<|\lambda|<1$ 时,$F(A,\lambda)=\frac{\lambda}{|\lambda|}\pi+O(1)$,且这里的 O – 常数与 A 及 λ 无关。

证明:(i) 这是显然的。

(ii) 在定理 2.2.1 的(i) 中,我们已证明了

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}。$$

通过变量替换,可知

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\varepsilon}^{-1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{-1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0+}\int_1^{\varepsilon}\frac{\sin x}{x}dx+\lim_{N\to+\infty}\int_1^{N}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}。$$

于是,可定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=\pi。$$

当 $\lambda\geqslant 1$ 时,

$$F(A,\lambda)=\int_{-A\lambda}^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du-\int_{-\infty}^{-A\lambda}\frac{\sin u}{u}du$$

$$-\int_{A\lambda}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\pi-2\int_{A\lambda}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du。$$

由分部积分得

$$\int_{A\lambda}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\lim_{N\to+\infty}\int_{A\lambda}^{N}\frac{\sin u}{u}du=\lim_{N\to+\infty}\Big(-\frac{\cos u}{u}\Big|_{Au}^{N}$$

$$-\int_{A\lambda}^{N}\frac{\cos u}{u^2}du\Big)=\frac{\cos(A\lambda)}{A\lambda}+O\Big(\int_{A\lambda}^{\infty}u^{-2}du\Big)$$

$$=O((A\lambda)^{-1})。$$

因此这时(ii)成立。类似地,当 $\lambda\leqslant -1$ 时,可证(ii)成立。

(iii)当 $0<\lambda<1$ 时,

$$F(A,\lambda)=\int_{-A\lambda}^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du=2\int_0^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du。$$

若 $A\lambda\leqslant\pi$,则

$$0\leqslant\int_0^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du=\lim_{\varepsilon\to0+}\Big(\int_{\varepsilon}^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du\Big)$$

$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to0+}\Big(\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\sin u}{u}du\Big)=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du=O(1)。$$

若 $A\lambda>\pi$,则对任一大于 1 的正数 N,有

$$\int_0^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du=-\int_1^{0}\frac{\sin u}{u}du+\int_1^{A\lambda}\frac{\sin u}{u}du$$

$$=\int_0^{1}\frac{\sin u}{u}du+\int_1^{N}\frac{\sin u}{u}du$$

$$-\int_{A\lambda}^{N}\frac{\sin u}{u}du。$$

令 $N \to +\infty$,可得

$$\int_0^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u + \int_1^{\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u - \lim_{N \to +\infty} \left(\int_{A\lambda}^{N} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{N \to +\infty} \left(- \frac{\cos u}{u} \Big|_{A\lambda}^{N} - \int_{A\lambda}^{N} \frac{\cos u}{u^2} \mathrm{d}u \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{A\lambda} + \int_{A\lambda}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + O((A\lambda)^{-1}) = \frac{\pi}{2} + O(1)。$$

所以当 $\lambda > 0$ 时(iii) 成立。类似地,当 $\lambda < 0$ 时也可证(iii) 成立。**证毕**。

下面我们证明定理 3.2.1。对于实数 ξ,令

$$S(\xi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) e(n\xi), e(n\xi) = \exp(2\pi i n\xi)。$$

设 c 为一个充分小的、正的常数。并令

$$Q_1 = \exp\left(\frac{\lambda c L}{\log L}\right), Q_2 = QL^{-2}, L = \log x,$$

这里 λ 为任一大于 1 的常数。我们的方法的出发点是下述恒等式:

$$\sum_{n \leqslant x} (\Lambda(n))^2 = \int_{\tau}^{1+\tau} |S(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha, \tag{1}$$

其中 $\tau = Q^{-1}$。(1) 确为一恒等式,因为其右边的值等于

$$\sum_{m \leqslant x} \sum_{n \leqslant x} \Lambda(m) \Lambda(n) \left(\int_{\tau}^{1+\tau} e((m-n)\alpha) \mathrm{d}\alpha \right),$$

而对于整数 k,由 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$,可知

$$\int_{\tau}^{1+\tau} e(k\alpha) \mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 0, 若\ k \neq 0, \\ 1, 若\ k = 0。\end{cases}$$

我们将发现:若用通常的圆法处理(1) 右端的积分,则经过适当的变化,就会出现均值和 $S(Q,x)$;这说明 $S(Q,x)$ 与圆法之间有着天然的联系。对于满足 $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$ 和 $(a,q) = 1$ 的每对整

数 a 与 q，令

$$m(q,a) = \{\alpha \mid |\alpha - a/q| \leqslant (qQ)^{-1}\},$$

则 $m(q,a)$ 为一个闭区间。我们断言：

$$[\tau, 1+\tau] \subseteq (\bigcup_{(a,q)} m(q,a)) \cup m([Q,], 1+[Q]); \qquad (2)$$

这里 $\bigcup_{(a,q)}$ 表示对于满足 $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$ 以及 $(a,q)=1$ 的所有整数 a 及 q 求并集。事实上，当 $\alpha \in [\tau, 1+\tau]$ 时，由引理 3.2.2，可知存在整数 a 与 q，满足 $(a,q)=1, 1 \leqslant q \leqslant Q$，使得

$$|\alpha - a/q| < 1/(qQ)。$$

由 $\alpha \in [\tau, 1+\tau]$，可得

$$0 \leqslant \frac{1-q^{-1}}{Q} \leqslant \alpha - \frac{1}{qQ} < \frac{a}{q} < \alpha + \frac{1}{qQ}$$
$$\leqslant 1 + Q^{-1} + (qQ)^{-1}, \qquad (3)$$

所以 $a \geqslant 1$，且 $a < q(1 + Q^{-1} + q^{-1}Q^{-1}) \leqslant q + 1 + Q^{-1}$，即 $1 \leqslant a \leqslant q+1$。若 $a = q+1$，则由(3)可得 $Q - q < 1$，故 $q = [Q]$。由此可知(2)成立。令 $Q_1 = (\log x)^{A+1}, Q_2 = Q(\log x)^{-2}$。由(1)及引理 2.3.2(xi)，我们有

$$x\log x + O(x) \leqslant (\sum_{q \leqslant Q_1} + \sum_{Q_1 \leqslant q \leqslant Q_2} + \sum_{Q_2 \leqslant q \leqslant Q}) \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \int_{I(q)} |S(z + \frac{a}{q})|^2 dz + \int_{I([Q])} |S(z + 1 + \frac{1}{[Q]})|^2 dz$$
$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \Delta([Q]), \qquad (4)$$

这里 $I(q) = [-(qQ)^{-1}, (qQ)^{-1}]$。由平凡的估计及 Cauchy 不等式可得

$$|S(z + 1 + \frac{1}{[Q]})|^2 \ll x \cdot (\sum_{n \leqslant x} \Lambda^2(n)) \ll x^2 \log x,$$

所以

$$\Delta([Q]) = O(x^{1/2})。 \qquad (5)$$

为估计 $\sum_2$，先选取正整数 J，使得 $2^J Q_1 \leqslant Q_2 < 2^{J+1} Q_1$。显见

$$\begin{aligned}\sum_2 &\leqslant \sum_T \sum_{q \sim T} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \int_{I(T)} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 \mathrm{d}z \\ &\leqslant \sum_T \int_{I(T)} \left(\sum_{q \sim T} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 \right) \mathrm{d}z \\ &\leqslant 2Q^{-1} \sum_T T^{-1} \left(\max_{z \in I(T)} \left(\sum_{q \sim T} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 \right) \right);\end{aligned}$$

这里 $\sum\limits_T$ 表示 T 取所有形如 $2^j Q_1$ 的数，j 为整数，$0 \leqslant j \leqslant T$，$q \sim T$ 表示 $T \leqslant q \leqslant 2T$。应用 §2.1 的(13)，在其中取

$$M = 0, N = [x], Q = 2T, a_n = \Lambda(n) e(nz),$$

则可得估计

$$\begin{aligned}\sum_{q \leqslant 2T} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 &\ll (x + T^2) \left(\sum_{n \leqslant x} \Lambda^2(n) \right) \\ &\ll x(x + T^2) \log x;\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_2 &\ll Q^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} (x Q_1^{-1} 2^{-j} + 2^j Q_1) \left(\sum_{n \leqslant x} \Lambda^2(n) \right) \\ &\ll (x Q^{-1} Q_1^{-1} + Q_2 Q^{-1}) x \log x \ll x。\end{aligned} \tag{6}$$

接着我们处理 $\sum_3$。首先注意到：若 z 为实数，则

$$|1 - e(z)| = \left| e\left(\frac{z}{2}\right) - e\left(-\frac{z}{2}\right) \right| = 2 |\sin(\pi z)| \leqslant 2\pi |z|;$$

其中对 $|\sin\theta| \leqslant |\theta|$ 的证明可分 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 和 $|\theta| \geqslant \frac{\pi}{2}$ 证出。因此，我们有

$$e(nz) = 1 + O(n|z|)。$$

于是，对于 $Q_2 \leqslant q \leqslant Q$，$(a,q) = 1$，及 $|z| \leqslant \frac{1}{qQ}$，我们有

$$\begin{aligned}S(z + a/q) &= \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e\left(\frac{na}{q}\right)(1 + O(n|z|))\\ &= \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e\left(\frac{na}{q}\right) + \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)>1}}\Lambda(n)e\left(\frac{na}{q}\right)\\ &\quad + O\Big(x|z|\Big(\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big)\Big)\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant q\\(r,q)=1}}e\left(\frac{ar}{q}\right)\Big(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv r(\bmod q)}}\Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\Big)\\ &\quad + O(x^{1/3});\end{aligned}\tag{7}$$

在推导中我们已用到(见定理 1.2.3(iii))

$$\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant q\\(r,q)=1}}e\left(\frac{ar}{q}\right) = \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant q\\(m,q)=1}}e\left(\frac{m}{q}\right) = \mu(q),$$

以及(用到引理 2.4.2(iii))

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\Big(\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\Big) \ll \frac{x}{\varphi(q)} \ll \frac{x}{Q_2}\log Q \ll x^{1/3},$$

$$\frac{x^2}{qQ} \ll \frac{x^2}{Q_2Q} \ll x^{1/3},$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)>1}}\Lambda(n) \leqslant \sum_{p\mid q}\sum_{\substack{m\geqslant 1\\p^m\leqslant x}}\log p \ll (\log x)^2。$$

注意到下列不等式(简记 $L = \log x$):

$$\begin{aligned}(|u| + |v|)^2 &= |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2\\ &\leqslant |u|^2 + |u|^2L^{-1} + |v|^2L + |v|^2\\ &\leqslant |u|^2(1 + L^{-1}) + 2|v|^2L,\end{aligned}$$

则由(7)可知

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_3 \leqslant \frac{2}{Q}\sum_{Q_2\leqslant q\leqslant Q}\frac{1}{q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\Big|\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant q\\(r,q)=1}}e\left(\frac{ar}{q}\right)\Big(\sum_{\substack{n\equiv r(\bmod q)\\n\leqslant x}}\Lambda(n)\\ - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(n,q)=1\\n\leqslant x}}\Lambda(n)\Big)\Big|^2(1 + L^{-1}) + O(x^{3/4})。\end{aligned}\tag{8}$$

将模 q 的主特征记为 χ_0，并简记 $\beta_n = \Lambda(n)$，则当 $(r,q)=1$ 时，应用定理 1.2.2 的(ii) 与(iii)，以及定理 1.2.3 的(i) 与(ii)，可得

$$\sum_{\substack{n\equiv r(\bmod q)\\ n\leqslant x}}\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\leqslant x}}\beta_n=$$

$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,q)=1}}\beta_n\Big(\sum_{\chi\bmod q}\overline{\chi}(r)\chi(n)\Big)-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi_0(n)$$

$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi\bmod q}}\overline{\chi}(r)\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n),$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant q\\ (r,q)=1}}e\Big(\frac{ar}{q}\Big)\Big(\sum_{\substack{n\equiv r(\bmod q)\\ n\leqslant x}}\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\leqslant x}}\beta_n\Big)$$

$$=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi\bmod q}}\chi(a)\tau(\overline{\chi})\Big(\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n)\Big),$$

$$\sum_{1\leqslant r\leqslant q}\Big|\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi\bmod q}}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\Big(\sum_{n\leqslant x}\beta_n\lambda(n)\Big)\Big|^2$$

$$=\sum_{\chi_1,\chi_2\neq\chi_0}\tau(\overline{\chi}_1)\overline{\tau(\overline{\chi}_2)}\Big(\sum_{\substack{(a,q)=1\\ 1\leqslant a\leqslant q}}(\chi_1\overline{\chi}_2)(a)\Big)\Big(\sum_{m,n\leqslant x}\beta_m\beta_n\chi_1(m)\overline{\chi}_2(n)\Big)$$

$$=\varphi(q)\sum_{\chi\neq\chi_0}\big|\tau(\overline{\chi})\big|^2\Big|\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n)\Big|^2$$

$$\leqslant\varphi(q)q\sum_{\chi\neq\chi_0}\Big|\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n)\Big|^2,$$

因此

$$\sum_{Q_2\leqslant q\leqslant Q}\frac{1}{q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\ 1\leqslant a\leqslant q}}\Big|\sum_{\substack{(r,q)=1\\ 1\leqslant r\leqslant q}}e\Big(\frac{ar}{q}\Big)\Big(\sum_{\substack{n\equiv r(\bmod q)\\ n\leqslant x}}\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\leqslant x}}\beta_n\Big)\Big|^2$$

$$\leqslant\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\Big|\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n)\Big|^2。\tag{9}$$

另一方面，应用定理 1.2.2 的(ii) 与(iii) 作类似的推导，我们有

$$S(Q,x) = \sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\left|\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(a)\Big(\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n)\Big)\right|^2$$

$$= \sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi \bmod q}}\left|\sum_{n\leqslant x}\beta_n\chi(n)\right|^2。\tag{10}$$

由(8)、(9)、(10)可得

$$\sum\nolimits_3 \leqslant \frac{2}{Q}S(Q,x)(1+(\log x)^{-1}) + O(x^{3/4})。\tag{11}$$

由(4)、(5)、(6)和(11)，我们得

$$x\log x \leqslant \frac{2}{Q}\cdot S(Q,x)(1+L^{-1}) + \sum\nolimits_1 + O(x)。\tag{12}$$

因此，为证明定理 3.2.1，我们只剩下估计 $\sum_1$ 了。令

$$d = \frac{c'}{22\lambda c},T = \exp\Big(\frac{10\lambda cL}{\log L}\Big),$$

这里 c' 为定理1.5.2中的正绝对常数 c_2。设 χ 为模q 的任一特征，$q\leqslant Q_1$。若函数 $L(s,\chi)$ 有一个满足

$$\rho = \beta + i\gamma,\beta\geqslant 1-\frac{d\log L}{L},|\gamma|\leqslant T \tag{13}$$

的零点 ρ，设 χ 是由模q_1 的原特征 χ_1 诱导的，即 $\chi=\chi_1\chi_q^0$，则由

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{p|q}\Big(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\Big),$$

以及 x 充分大，可知 $L(\rho,\chi_1)=0$。这时，由于

$$\beta\geqslant 1-\frac{d\log L}{L}\geqslant 1-\frac{c'}{\log(Q_1(|t|+2))},$$

$\rho=\beta+i\gamma$ 必是所谓的 Q_1 – 例外零点 $\tilde{\beta}$(见定理1.5.2)，并且$(q_1,\chi_1,\rho)=(\tilde{q},\tilde{\chi},\tilde{\beta})$，$\tilde{q}|q$，这里$(\tilde{q},\tilde{\chi},\tilde{\beta})$为此时必存在的 Q_1 – 例外组。因此，$L(s,\chi)$ 或者没有满足(13)的零点，若有，则 Q_1 – 例外组$(\tilde{q},\tilde{\chi},\tilde{\beta})$存在，且 $\tilde{q}|q$。对于 $q\leqslant Q_1$ 以及模 q 的任一特征χ，

令

$$S(\chi,z)=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\Lambda(n)e(nz),\tau(\chi)=\sum_{h\leqslant q}\chi(h)e(\frac{h}{q}),$$

这里 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和。又令

$$F(\chi_q^0,z)=S(\chi_q^0,z)-R(z),R(z)=\sum_{n\leqslant x}e(nz)。$$

若 Q_1 - 例外组不存在，或 Q_1 - 例外组虽存在，但 $\tilde{q}\nmid q$，令 $\theta(q)=0$，以及

$$F(x,z)=S(x,z),x\neq\chi_q^0$$

令 $\theta(q)=1$，以及

$$F(\tilde{\chi}\chi_q^0,z)=S(\tilde{\chi}\chi_q^0,z)+\tilde{R}(z),\tilde{R}(z)=\sum_{n\leqslant x}n^{\tilde{\beta}-1}e(nz),$$

$$F(\chi,z)=S(\chi,z),\chi\neq\chi_q^0,\chi\neq\tilde{\chi}\chi_q^0。$$

当 $\alpha=\frac{a}{q}+z,1\leqslant a\leqslant q,(a,q)=1$ 且 $|z|\leqslant(qQ)^{-1}$ 时，应用定理 1.2.2 的(ii) 及定理 1.2.3 的(i) 与(iii)，可得

$$\begin{aligned}
S(\alpha)&=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(n\alpha)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)e(n(\frac{a}{q}+z))\\
&\quad+O(\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)>1}}(\Lambda(n))\\
&=\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}e(\frac{ra}{q})(\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\equiv r(\bmod q)}}\Lambda(n)e(nz))+O(L^2)\\
&=\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}e(\frac{ra}{q})[\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}\overline{\chi}(r)S(\chi,z)]+O(L^2)\\
&=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}(\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\overline{\chi}(r)e(\frac{ra}{q}))S(\chi,z)+O(L^2)\\
&=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})S(\chi,z)+O(L^2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu(q)R(z)}{\varphi(q)} - \frac{\theta(q)\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)\widetilde{\chi}(a)\widetilde{R}(z)}{\varphi(q)}$$

$$+ \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z) + O(L^2), \qquad (14)$$

这里 $\sum\limits_{\chi \bmod q}$ 表示 χ 取过所有模 q 的特征，并且我们已注意到当 Q_1 - 例外特征 $\widetilde{\chi}$ 存在时，它是实特征。由(14) 及不等式(设 $n \ll 1$)

$$(|u_1| + \cdots + |u_n|)^2 \ll |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2,$$

容易得

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{q \leqslant Q_1}\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}}\int_{I(q)}\left|S\left(z + \frac{a}{q}\right)\right|^2 \mathrm{d}z$$

$$\ll \sum\nolimits_4 + \sum\nolimits_5 + \sum\nolimits_6 + x^{1/2}, \qquad (15)$$

这里

$$\sum\nolimits_4 = \left(\sum_{q \leqslant Q_1}\frac{1}{\varphi(q)}\right)\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|R(z)|^2 \mathrm{d}z\right),$$

$$\sum\nolimits_5 = \left(\sum_{q \leqslant Q_1}\frac{\theta(q)|\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi(q)}\right)\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\widetilde{R}(z)|^2 \mathrm{d}z\right),$$

$$\sum\nolimits_6 = \sum_{q \leqslant Q_1}\sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}\int_{I(q)}\left|\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\right|^2 \mathrm{d}z。$$

在以下的估计中，$\ll$ 记号所忽略的绝对常数都与 c 无关。由引理 3.2.3 可知

$$\sum_{q \leqslant Q_1}\frac{1}{\varphi(q)} \ll \log Q_1 \ll \frac{cL}{\log L},$$

又

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|R(z)|^2 \mathrm{d}z = \sum_{n \leqslant x}1 = x + O(1),$$

所以

$$\sum\nolimits_4 \ll \frac{cxL}{\log L}。\tag{16}$$

若 Q_1 - 例外组存在,令 $\theta = 1$,否则,令 $\theta = 0$。则当 $q \leqslant Q_1$ 时,$\theta(q) = 1$ 当且仅当 $\theta = 1$ 且 $\tilde{q} \mid q$。当 $\theta(q) = 1$ 时,由定理1.2.3的(ii)得

$$|\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 \leqslant r,$$

这里 $\tilde{\chi}$ 与 r 分别为 Q_1 - 例外特征与 Q_1 - 例外模。因此,应用 $\varphi(m\tilde{r}) \geqslant \varphi(m)\varphi(r)$,引理 2.4.2 的(iii),$r \leqslant Q_1$,以及引理 3.2.3,可得

$$\sum_{q \leqslant Q_1} \frac{\theta(q)|\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi(q)} \leqslant \theta \sum_{mr \leqslant Q_1} \frac{r}{\varphi(mr)} \leqslant \theta \frac{r}{\varphi(r)} \sum_{m \leqslant Q_1} \frac{1}{\varphi(m)}$$
$$\ll \log\log Q_1 \cdot \log Q_1 \ll cL。$$

又

$$\theta\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{R}(z)|^2 \mathrm{d}z = \theta \cdot \sum_{n \leqslant x} n^{2(\tilde{\beta}-1)} \ll x,$$

所以

$$\sum\nolimits_5 \ll cLx。\tag{17}$$

对于 $\sum_6$,将 $\left|\sum\limits_{\chi \bmod q}\right|^2$ 展开,并应用定理 1.2.2 的(iii),得

$$\sum\nolimits_6 = \sum_{q \leqslant Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \int_{I(q)} |\tau(\tilde{\chi}) F(\chi, z)|^2 \mathrm{d}z。\tag{18}$$

设 q 为正整数,$q \leqslant Q_1$,$z \in I(q)$,q 与 z 固定。当 $q \geqslant 3$ 时,对模 q 的任一非主特征 χ,由定理 1.2.2 的(v),有唯一的正整数 m,$m \mid q$,及模 m 的唯一原特征 χ_1,使得 $\chi = \chi_1 \chi_q^0$。对模 q 的全体非主特征 χ 按有序对(m, χ_1)进行分类,可知

$$\sum_{\substack{\chi \neq \chi_q^0 \\ \chi \bmod q}} |\tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)|^2$$

$$= \sum_{m \mid q} \sum_{\chi_1 (\bmod m)}{}^{*} \mid \tau(\overline{\chi_1 \chi_q^0}) F(\chi_1 \chi_q^0, z) \mid^2, \tag{19}$$

这里 * 表示对模 m 的全体原特征求和。事实上，很明显(19)式的左边不超过右边，而右边每对(m, χ_1)所诱导的模 q 非主特征 $\chi_0\chi_1$ 是互不相同的，因为若 $\chi_0\chi_1 = \chi_0\chi_2$，$\chi_i$ 为模 m_i 的原特征，$m_i \mid q$，$i = 1,2$，则由定理 1.2.2 的(iii)中关于唯一性的证明可知，必有 $m_1 = m_2$，$\chi_1 = \chi_2$。因此，(19)式的右边又不超过左边。所以等式(19)确定成立。由(15)，作平凡的估计可得

$$F(\chi_1 \chi_q^0, z) = F(\chi_1, z) + O(L^2),$$

因此，由定理 1.2.3 的(ii)及(19)，我们有(注意：模 1 或模 2 仅有主特征)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\chi \neq \chi_q^0 \\ \chi \bmod q}} \mid \tau(\overline{\chi}) F(\chi, z) \mid^2 &\leqslant \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 (\bmod m)}{}^{*} \mid F(\chi_1, z) + O(L^2) \mid^2, \\
&\ll \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 (\bmod m)}{}^{*} (\mid F(\chi_1, z) \mid^2 + L^4) \\
&\ll \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 (\bmod m)}{}^{*} \mid F(\chi, z) \mid^2 \\
&\quad + L^4 \sum_{m \mid q} m\varphi(m),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{3 \leqslant q \leqslant Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_q^0 \\ \chi \bmod q}} \int_{I(q)} \mid \tau(\overline{\chi}) F(\chi, z) \mid^2 \mathrm{d}z \\
\ll &\sum_{3 \leqslant q \leqslant Q_1} \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 (\bmod m)}{}^{*} \left(\int_{I(m)} \mid F(\chi_1, z) \mid^2 \mathrm{d}z \right) \\
&+ \frac{L^4}{Q} \sum_{q \leqslant Q_1} \frac{1}{q\varphi(q)} \left(\sum_{m \mid q} m\varphi(m) \right) \\
\ll &\sum_{3 \leqslant m \leqslant Q_1} m \left(\sum_{\chi_1 \bmod m}{}^{*} \left(\int_{I(m)} \mid F(\chi_1, z) \mid^2 \mathrm{d}z \right) \right) \left(\sum_{ms \leqslant Q_1} \frac{1}{\varphi(ms)} \right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{L^4}{Q}\sum_{m\leqslant Q_1} m\varphi(m)\Big(\sum_{\substack{m\mid q\\ q\leqslant Q_1}}\frac{1}{q\varphi(q)}\Big)$$

$$\ll \sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\frac{m}{\varphi(m)}\sum_{\chi_1(\bmod m)}{}^{*}\Big(\int_{I(m)}|F(\chi_1,z)|^2\mathrm{d}z\Big)\Big(\sum_{s\leqslant Q_1}\frac{1}{\varphi(s)}\Big)$$

$$+Q_1\frac{L^4}{Q};$$

其中已用到 $\varphi(ms)\geqslant\varphi(m)\varphi(s)$。由引理 2.4.2 的(iii) 和引理 3.2.3 可得

$$\text{当 } m\leqslant Q_1 \text{ 时},\frac{m}{\varphi(m)}\ll\log\log Q_1\ll\log L,$$

$$\sum_{s\leqslant Q_1}\frac{1}{\varphi(s)}\ll\log Q_1\ll\frac{cL}{\log L},$$

所以

$$\sum_{3\leqslant q\leqslant Q_1}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi\bmod q}}\int_{I(q)}|\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z$$

$$=O\Big(cL\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi_1\bmod m}{}^{*}\Big(\int_{I(m)}|F(\chi_1,z)|^2\mathrm{d}z\Big)\Big)$$

$$+O(L^4Q^{-1})$$

$$=O\Big(cL\sum\nolimits_7\Big)+O(Q_1L^4Q^{-1}),\tag{20}$$

这里

$$\sum\nolimits_7=\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi_1\bmod m}{}^{*}\Big(\int_{I(m)}|F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z\Big)。\tag{21}$$

由(15) ~ (18),$\tau(\chi_q^0)=\mu(q)$(见定理1.2.3的(iii)),以及(20),可得

$$\sum\nolimits_6=O\Big(\sum_{q\leqslant Q_1}\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\Big)\Big(\int_{I(q)}|F(\chi_q^0,z)|^2\mathrm{d}z\Big)$$

$$+cL\sum\nolimits_7+Q_1L^4Q^{-1}),$$

$$\sum\nolimits_1 = O(cxL) + O\Big(\sum_{q\leqslant Q_1}\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{I(q)}|F(\chi_q^0,z)|^2\mathrm{d}z\Big) + O\Big(cL\sum\nolimits_7\Big), \tag{22}$$

其中$\sum_7$由(21)给出。设$3\leqslant m\leqslant Q_1$。对于模 m 的每个原特征χ，由定义可知

$$F(\chi,z) = \sum_n C(n,\chi)e(nz),$$

这里

$$C(n,\chi) = \begin{cases}0, & n > x \text{ 或 } n < 1,\\ \chi(n)\Lambda(n) + E_{1,\chi}n^{\tilde\beta-1}, & 1\leqslant n\leqslant x,\end{cases}$$

其中当(χ,m)为 Q_1 - 例外对$(\tilde\chi,\tilde q)$时，$E_{1,\chi} = 1$，这时$\tilde\beta$为Q_1 - 例外零点，否则 $E_{1,\chi} = 0$。令 $\sigma = mQ/2$，

$$C(t) = \sigma^{-1}\sum_{|n-t|\leqslant\sigma/2}\overline{C(n,\chi)}。$$

设 $\sigma_1 = 1-\sigma/2,\sigma_2 = x+\sigma/2$。注意，当 $t\notin[\sigma_1,\sigma_2]$ 时，$C(t) = 0$。对充分大的正数 M，$M > 2\sigma_2$，函数 $C(t)$ 在区间$[-M,M]$上是有界变差的。为证这个论断，任取$[-M,M]$的一组分点$\{x_i\}$，

$$-M = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = M,$$

若设位于区间$[\sigma_1,\sigma_2]$内的分点为 $y_0,y_1,\cdots,y_{K+1}$，$\sigma_1\leqslant y_0<\cdots<y_{K+1}\leqslant\sigma_2$，则(注意:若 $y\notin[\sigma_1,\sigma_2]$，则 $C(y) = 0$)

$$\sum_{i=0}^{N}|C(x_{i+1})-C(x_i)| \leqslant |C(y_0)-C(\sigma_1)| + |C(\sigma_1)| + \sum_{i=0}^{K}|C(y_{i+1})-C(y_i)| + |C(\sigma_2)-C(y_{K+1})| + |C(\sigma_2)|。 \tag{23}$$

显然，对任意的 t，都有

$$|C(t)| \leqslant \sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x}|C(n,\chi)|。 \tag{24}$$

我们断言:对每个 $i,0\leqslant i\leqslant K$,成立着

$$|C(y_{i+1})-C(y_i)| \leqslant \sigma^{-1}\Big(\sum_{y_i-\frac{\sigma}{2}\leqslant n<y_{i+1}-\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|\Big) + \sigma^{-1}\Big(\sum_{y_i+\frac{\sigma}{2}<n\leqslant y_{i+1}+\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|\Big)。 \tag{25}$$

若 $y_{i+1}-\dfrac{\sigma}{2}>y_i+\dfrac{\sigma}{2}$,则

$$\begin{aligned}|C(y_{i+1})-C(y_i)| &\leqslant |C(y_{i+1})|+|C(y_i)|\\ &\leqslant \sigma^{-1}\sum_{y_{i+1}-\frac{\sigma}{2}\leqslant n\leqslant y_{i+1}+\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)| + \sigma^{-1}\sum_{y_i-\frac{\sigma}{2}\leqslant n\leqslant y_i+\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|\\ &\leqslant \sigma^{-1}\sum_{y_i+\frac{\sigma}{2}<n\leqslant y_{i+1}+\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)| + \sigma^{-1}\sum_{y_i-\frac{\sigma}{2}\leqslant n<y_{i+1}-\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|,\end{aligned}$$

因此(25) 成立。若 $y_{i+1}-\dfrac{\sigma}{2}\leqslant y_i+\dfrac{\sigma}{2}$。则

$$\begin{aligned}|C(y_{i+1})-C(y_i)| &= \Big|\sigma^{-1}\sum_{y_i-\frac{\sigma}{2}\leqslant n<y_{i+1}-\frac{\sigma}{2}}C(n,\chi) - \sigma^{-1}\sum_{y_i+\frac{\sigma}{2}<n\leqslant y_{i+1}+\frac{\sigma}{2}}C(n,\chi)\Big|\\ &\leqslant \sigma^{-1}\sum_{y_i-\frac{\sigma}{2}\leqslant n<y_{i+1}-\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)| + \sigma^{-1}\sum_{y_i+\frac{\sigma}{2}<n\leqslant y_{i+1}+\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|,\end{aligned}$$

因此(25) 仍成立。我们有

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant K}\sigma^{-1}\sum_{y_i-\frac{\sigma}{2}\leqslant n<y_{i+1}-\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)| &= \sigma^{-1}\Big(\sum_{y_0-\frac{\sigma}{2}\leqslant n<y_{K+1}-\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|\Big)\\ &\leqslant \sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x}|C(n,\chi)|,\end{aligned}$$

并且类似地可得

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant K}\sigma^{-1}\Big(\sum_{y_i+\frac{\sigma}{2}<n\leqslant y_{i+1}+\frac{\sigma}{2}}|C(n,\chi)|\Big) \leqslant \sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x}|C(n,\chi)|。$$

因此,由(23)、(24) 及(25) 可得

$$\sum_{i=0}^{N} |C(x_{i+1}) - C(x_i)| = O(\sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x}|C(n,\chi)|),$$

且其中 O 记号蕴含的常数与 N 无关。这就证明了 $C(t)$ 在区间 $[-M,M]$ 上是有界变差的函数。若设 $C(t) = u(t) + iv(t)$, $u(t)$ 和 $v(t)$ 是实函数,则 $u(t)$ 和 $v(t)$ 也是区间 $[-M,M]$ 上有界变差的。由引理 3.2.4 可知,$u(t)$ 和 $v(t)$ 都在 $[-M,M]$ 上可积,所以按定义 $C(t)$ 也在 $[-M,M]$ 上可积。由此及定义不难验证:$C(t)$ 还在 $[-M,M]$ 的任何子区间上可积且绝对可积,特别地 $C(t)$ 在 $[\sigma_1,\sigma_2]$ 上可积。对每个正整数 n, $1\leqslant n\leqslant x$,定义区间 $[\sigma_1,\sigma_2]$ 上的函数 $\Delta(y,n)$ 为

$$\Delta(y,n) = \begin{cases} 1, 若\ \max(\sigma_1, n-\frac{\sigma}{2}) \leqslant y \leqslant \min(\sigma_2, n+\frac{\sigma}{2}), \\ 0, 否则, \end{cases}$$

则容易知道 $\Delta(y,n)$ 也为 $[\sigma_1,\sigma_2]$ 上的有界变差函数,因而它是 $[\sigma_1,\sigma_2]$ 上可积的函数。由于我们有(注意,由此也可给出 $C(y)$ 在 $[\sigma_1,\sigma_2]$ 上可积的另一证明)

$$C(y) = \sigma^{-1}\sum_{|n-y|\leqslant\frac{1}{2}\sigma} C(n,\chi) = \sigma^{-1}\sum_{1\leqslant n\leqslant x} C(n,\chi)\Delta(y,n),$$

所以,当 $M > 2\sigma_2$ 时,对任意实数 t, $t\neq 0$,我们有

$$\int_{-M}^{M} C(y)e(-yt)\mathrm{d}y = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y)e(-yt)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sigma^{-1}(\sum_{1\leqslant n\leqslant x} C(n,\chi)$$

$$\Delta(y,n))e(-yt)\mathrm{d}y = \sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x} C(n,\chi)(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Delta(y,n)e(-yt)\mathrm{d}y)$$

$$= \sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x} C(n,\chi)(\int_{n-\frac{\sigma}{2}}^{n+\frac{\sigma}{2}} e(-yt)\mathrm{d}y)$$

$$= \sigma^{-1}\sum_{n\leqslant x}C(n,\chi)e(-nt)\left(\int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}}e(-zt)\mathrm{d}z\right)$$

$$= \left(\sum_{n\leqslant x}C(n,\chi)e(-nt)\right)\frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}$$

$$= \frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}\overline{F(\chi,t)}。\tag{26}$$

又，显然有

$$\int_{-M}^{M}|C(y)|\mathrm{d}y = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|C(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \sigma^{-1}(\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n\leqslant x}|C(n,\chi)|。\tag{27}$$

若补充定义$\left.\frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t} = 1$，则由推导过程可知(26) 式仍成立。由(27) 可知 $C(x)$ 在$(-\infty,\infty)$上绝对可积。因此，由定义及(26) 可得函数 $C(x)$ 在$(-\infty,\infty)$上的 Fourier 变换(定义见 §2.2) 为

$$\hat{C}(t) = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}C(y)e(-yt)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}C(y)e(-yt)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}\overline{F(\chi,t)}。\tag{28}$$

因为函数$|F(\chi,t)|$对 t 一致地有界，且当 $0<|t|\leqslant\frac{1}{2\sigma}$ 时，

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\left|\frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}\right|\leqslant 1,\tag{29}$$

所以不难知道 $\hat{C}(t)$ 在$(-\infty,\infty)$上平方可积。设 $A\geqslant 3$，则

$$\int_{-A}^{A}|\hat{C}(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-A}^{A}\overline{\hat{C}(t)}\cdot\hat{C}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-A}^{A}\overline{\hat{C}(t)}\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}C(y)e(-yt)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}C(y)\left(\int_{-A}^{A}\overline{\hat{C}(t)}e(-yt)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y。\tag{30}$$

当 y 固定时,由(28)我们有

$$\int_{-A}^{A}\overline{\hat{C}(t)}\cdot e(-yt)\mathrm{d}t=\int_{-A}^{A}\frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}\cdot F(\chi,t)\mathrm{e}(-yt)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n\leqslant x}C(n,\chi)\Big(\int_{-A}^{A}\frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t}e((n-y)t)\mathrm{d}t\Big)$$

$$=\sum_{n\leqslant x}C(n,\chi)\Big(\int_{-A}^{A}\frac{\sin(\pi\sigma t)\cdot\cos(2\pi t(n-y))}{\pi\sigma t}\mathrm{d}t\Big)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma}\sum_{n\leqslant x}C(n,\chi)\Big(\int_{-A}^{A}\frac{\sin[\pi t(\sigma+2(n-y))]}{t}\mathrm{d}t$$

$$+\int_{-A}^{A}\frac{\sin[\pi t(\sigma-2(n-y))]}{t}\mathrm{d}t\Big)。\tag{31}$$

令 $f_1(n)=\pi(\sigma+2(n-y))$, $f_2(n)=\pi(\sigma-2n-y)$。我们将满足 $n\leqslant x$ 的正整数 n 分成三个集合 A_1、A_2 和 A_3(A_i 都与 y 有关)

$$A_1=\{n\leqslant x\mid f_1(n)=0\text{ 或 }f_2(n)=0\},$$

$$A_2=\{n\leqslant x\mid |f_1(n)|\geqslant 1\text{ 且 }|f_2(n)|\geqslant 1\},$$

$$A_3=\{n\leqslant x\mid 0<|f_1(n)|<1\text{ 或 }0<|f_2(n)|<1\}。$$

采用引理3.2.5中的记号。由引理3.2.5,当 $n\in A_1$ 时,n 至多只有2个取值,且对每个 n,

$$F(A,f_1(n))+F(A,f_2(n))=F(A,2\pi\sigma)=O(1)。$$

我们有 $A_2=A_{21}\cup A_{22}\cup A_{23}$,这里($A_{ij}$ 都与 y 有关)

$$A_{21}=\{n\leqslant x\mid 2(n-y)<-\sigma-1\},$$

$$A_{22}=\{n\leqslant x\mid 2(n-y)>\sigma+1\},$$

$$A_{23}=\{n\leqslant x\mid 1-\sigma\leqslant 2(n-y)\leqslant\sigma-1\}。$$

应用引理3.2.5,当 $n\in A_{21}\cup A_{22}$ 时,

$$F(A,f_1(n))+F(A,f_2(n))=O\Big(\frac{1}{A}\Big),$$

当 $n\in A_{23}$ 时,

$$F(A,f_1(n))+F(A,f_2(n))=2\pi+O\Big(\frac{1}{A}\Big)。$$

当 $n \in A_3$ 时，n 至多有 2 个取值，且由引理 3.2.5 可知对每个这样的 n，有

$$F(A, f_1(n)) + F(A, f_2(n)) = O(1),$$

且这里的 O - 常数与 A 及 λ 无关。综合这些讨论，由估计

$$C(n, \chi) \ll \Lambda(n) + 1 \ll L,$$

以及(31)，可得

$$\int_{-A}^{A} \overline{\hat{C}(t)} e(-yt) \mathrm{d}t = \sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi) + O(\sigma^{-1} x L A^{-1}) + O(\sigma^{-1} L)。 \quad (32)$$

对每个正整数 $n, n \leqslant x$，令

$$\Delta_1(y, n) = \begin{cases} 1, 若 \max\left(n - \dfrac{1}{2}(\sigma - 1), \sigma_1\right) \\ \qquad \leqslant y \leqslant \min\left(n + \dfrac{1}{2}(\sigma - 1), \sigma_2\right), \\ 0, 否则, \end{cases}$$

容易看出 $\Delta_1(y, n)$ 为区间 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上的有界变差函数，因而由引理 3.2.4 得知它是 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上的 Riemann 可积的函数。于是，我们得知 y 的函数

$$\sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi) = \sigma^{-1} \sum_{n \leqslant x} \Delta_1(y, n) C(n, \chi)$$

也是 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上 Riemann 可积的。注意，由于 $|\overline{\hat{C}(t)}|$ 是可积的，所以容易知道(32) 左边为 y 的连续函数。于是，差

$$\int_{-A}^{A} \overline{\hat{C}(t)} e(-yt) \mathrm{d}t - \sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi)$$

为 y 的可积函数。由(30) 及(32) 可得

$$\int_{-A}^{A} |\overline{\hat{C}(t)}|^2 \mathrm{d}t = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) \Big(\sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi) + O(\sigma^{-1} x L A^{-1} + \sigma^{-1} L)\Big) \mathrm{d}y$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) G(y) \mathrm{d}y + O((\sigma^{-1} x L A^{-1}$$

$$+\sigma^{-1}L)\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|C(y)|\mathrm{d}y),$$

这里

$$G(y)=\sigma^{-1}\sum_{|n-y|\leqslant\frac{1}{2}(\sigma-1)}C(n,\chi)。$$

令 $A\to+\infty$，我们得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{C}(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}C(y)G(y)\mathrm{d}y$$

$$+O(\sigma^{-1}L\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|C(y)|\mathrm{d}y)。\quad(33)$$

我们可应用(33)去估计(22)中的$\sum_7$。若 $3\leqslant m\leqslant Q_1$，$\chi$ 为模 m 的一个原特征，则当 $z\in I(m)$ 时，$|\pi z\sigma|\leqslant\frac{\pi}{2}$。因此，由(28)、(29)及(33)，可得

$$\int_{I(m)}|F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z\leqslant(\frac{\pi}{2})^2\int_{I(m)}|\frac{\sin(\pi z\sigma)}{\pi z\sigma}F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z$$

$$\ll\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{\sin(\pi z\sigma)}{\pi z\sigma}F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{C}(z)|^2\mathrm{d}z$$

$$\ll\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|C(y)G(y)|\mathrm{d}y+\sigma^{-1}L\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|C(y)|\mathrm{d}y。\quad(34)$$

当 $y\in[\sigma_1,\sigma_2]$ 时，应用 $C(n,\chi)\ll\Lambda(n)+1$ 以及定理 1.6.1 的(iii)，可得

$$C(y)=\sigma^{-1}\sum_{x_1\leqslant n\leqslant x_2}\overline{C(n,\chi)}=\sigma^{-1}\sum_{x_3\leqslant n\leqslant x_2}\overline{C(n,\chi)}+O(\sigma^{-1}xT^{-1}),$$

$$G(y)=\sigma^{-1}\sum_{y_1\leqslant n\leqslant y_2}C(n,\chi)=\sigma^{-1}\sum_{y_3\leqslant n\leqslant y_2}C(n,\chi)+O(\sigma^{-1}xT^{-1}),$$

这里

$$x_1=\max(1,y-\frac{\sigma}{2}),x_2=\min(x,y+\frac{\sigma}{2})$$

$$x_3=\max(xT^{-1},y-\frac{\sigma}{2}),$$

$$y_1 = \max(1, y - \frac{\sigma - 1}{2}), y_2 = \min(x, y + \frac{\sigma - 1}{2}),$$

$$y_3 = \max(xT^{-1}, y - \frac{\sigma - 1}{2})。$$

设

$$C_1(y) = \sigma^{-1} \sum_{x_3 \leqslant n \leqslant x_2} \overline{C(n, \chi)}, G_1(y) = \sigma^{-1} \sum_{y_3 \leqslant n \leqslant y_2} \overline{C(n, \chi)}。$$

则

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)G(y)| \mathrm{d}y \ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)G_1(y)| \mathrm{d}y +$$

$$\sigma^{-1}xT^{-1}(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(C_1(y)|$$

$$+ |G_1(y)|)\mathrm{d}y + \sigma^{-2}x^2T^{-2}(\sigma + x)$$

$$\ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)G_1(y)| \mathrm{d}y + x^2T^{-1}\sigma^{-2}(\sigma + x);$$

这里用到平凡估计：$|C_1(y)| \ll x\sigma^{-1}$，$|G_1(y)| \ll x\sigma^{-1}$。类似地有

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)| \mathrm{d}y \ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)| \mathrm{d}t + (x + \sigma)\sigma^{-1}xT^{-1}。$$

所以，由(34)得

$$\int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 \mathrm{d}z \ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)G_1(y)| \mathrm{d}y +$$

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)| \mathrm{d}y + x^2T^{-1}\sigma^{-2}(\sigma + x)。 \tag{35}$$

对于一个使得 $x_3 \leqslant x_2$ 的 y，$y \in [\sigma_1, \sigma_2]$，由定理 1.6.1 的(i)可知

$$\sum_{x_3 \leqslant n \leqslant x_2} \chi(n)\Lambda(n) = \theta \frac{x_3^{\tilde{\beta}} - x_2^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \widetilde{\sum_{|t| \leqslant T}} \frac{x_2^{\rho} - x_3^{\rho}}{\rho}$$

$$+ O(\frac{x}{T}L^2), \tag{36}$$

这里 $\theta=1$ 当且仅当 $(m,\chi,\tilde{\beta})$ 为 Q_1 – 例外组(见定理1.5.2),否则 $\theta=0$, $\widetilde{\sum\limits_{|t|\leqslant T}}$ 表示求和通过 $L(s,\chi)$ 的一切除去 $\tilde{\beta}$ 及 $1-\tilde{\beta}$(若 $\tilde{\beta}$ 存在)外的非平凡零点 $\rho=\beta+it$。因此,由 $C(n,\chi)$ 的定义可得

$$\sigma\overline{C_1(y)}=\sum_{x_3\leqslant n\leqslant x_2}C(n,\chi)=$$
$$=\sum_{x_3\leqslant n\leqslant x_2}\chi(n)\Lambda(n)+\theta\cdot\sum_{x_3\leqslant n\leqslant x_2}n^{\tilde{\beta}-1}。$$

当 $\theta=1$ 时,由推论1.1.4可知

$$\sum_{x_3\leqslant n\leqslant x_2}n^{\tilde{\beta}-1}=\int_{x_3}^{x_2}u^{\tilde{\beta}-1}\mathrm{d}u+O(L)=\frac{1}{\tilde{\beta}}(x_2^{\tilde{\beta}}-x_3^{\tilde{\beta}})+O(L)。$$

因此由(36)我们有

$$\sigma\cdot\overline{C_1(y)}=-\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}\frac{x_2^{\rho}-x_3^{\rho}}{\rho}+O(\frac{x}{T}L^2)。\tag{37}$$

显然,由(36)可知(37)当 $\theta=0$ 时也成立。设 s 为任一复数。对于位于一个复 z 平面上的半平面 $\{z\mid \mathrm{Re}z>\alpha>0\}$ 上的任一复数 z,定义

$$z^{s-1}=\exp((s-1)\log z),$$

这里 $\log z$ 取主分支。因为 $\log z$ 在 $\{z\mid \mathrm{Re}\ z>\alpha\}$ 中为解析函数,z^{s-1} 也为 $\{z\mid \mathrm{Re}\ z>\alpha\}$ 上的解析函数。设 ω_0 及 ω 为任二复数,$\mathrm{Re}\ \omega>\alpha$, $\mathrm{Re}\ \omega_0>\alpha$。当 ω_0 固定,ω 在半平面 $\{z\mid \mathrm{Re}\ z>\alpha\}$ 上变动时,考虑函数

$$g(\omega)=\omega^s-\omega_0^s-s\int_{\omega_0}^{\omega}z^{s-1}\mathrm{d}z,$$

这里复积分是沿从 ω_0 到 ω 的直线段取的。由定义容易验证 $g(\omega)$ 为开连通集 $\{z\mid \mathrm{Re}\ z>\alpha\}$ 上的解析函数,且 $g'(\omega)=0$。因此 $g(\omega)$ 是常数,$g(\omega)=g(\omega_0)=0$。特别地,我们得

$$x_2^\rho - x_3^\rho = \rho\int_{x_3}^{x_2} u^{\rho-1}\mathrm{d}u \ll |\rho| \cdot \int_{x_3}^{x_2} u^{\beta-1}\mathrm{d}u$$

$$\ll |\rho| \min(x,\sigma)(xT^{-1})^{\beta-1},$$

这里 $\beta = \mathrm{Re}\ \rho$。因此由(37)我们得到

$$|C_1(y)| \ll \sigma^{-1}\min(x,\sigma)\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big) + x\sigma^{-1}T^{-1}L^2。$$

类似地,对于使得 $y_3 \leqslant y_2$ 的 $y, y \in [\sigma_1, \sigma_2]$,可得

$$|G_1(y)| \ll \sigma^{-1}\min(x,\sigma)\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big) + x\sigma^{-1}T^{-1}L^2。$$

于是由(35)我们可得到

$$\int_{I(m)} |F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z \ll (\sigma + x)(\min(x\sigma^{-1},1))^2\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2$$

$$+ (\sigma + x)\min(x\sigma^{-1},1)\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big) + L^2T^{-1}x(1 + x\sigma^{-1})^2$$

$$\equiv P_1 + P_2 + P_3。$$

分 $\sigma > x$ 与 $\sigma \leqslant x$ 讨论,可知

$$P_1 \ll x\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2, P_2 \ll x\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)。$$

所以我们有

$$\int_{I(m)} |F(\chi,z)^2|\mathrm{d}z \ll x\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2$$

$$+ x\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big) + L^2T^{-1}x(1 + x\sigma^{-1})^2。\qquad (38)$$

因此,由 $\sigma = \frac{1}{2}mQ$,(21)及(38),得

$$\sum\nolimits_7 \ll x\Big(\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2$$

$$+ x\Big(\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)$$

$$+ L^2 T^{-1} x Q_1^2 (1 + x\sigma^{-1}) \tag{39}$$

由 Q_1 与 T 的选取(见(1)的上方,及(12)与(13)之间),及 Q 的变化范围,可知(39)式右端的最后一项为

$$\ll x\exp(-c\frac{L}{\log L})。\tag{40}$$

我们有

$$\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1} = \sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\widetilde{\sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ \beta<\frac{11}{12}}}}(xT^{-1})^{\beta-1}$$

$$+\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\widetilde{\sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ \beta\geqslant\frac{11}{12}}}}(xT^{-1})^{\beta-1} = S_1 + S_2。\tag{41}$$

应用定理 1.5.10(iii)的(b),平凡地得到估计

$$S_1 = O((xT^{-1})^{-1/12}\sum_{3\leqslant m\leqslant Q_1}\sum_{\chi \bmod m}{}^{*}TL)$$

$$= O((xT^{-1})^{-1/12}Q_1^2 TL) = O(x^{-1/13})。\tag{42}$$

由定理 1.5.2 可知,存在常数 $c'>0$,使得对于每个计数于 S_2 中的零点 $\rho=\beta+it$,都有

$$1-\beta \geqslant \frac{c}{\log(Q_1(T+2))}。$$

简记 $\log(Q_1(T+2)) = L_1$。设 x 充分大,使 $1-\lambda_1/L_1 > 11/12$。为估计 S_2,设 $M\geqslant 3$, M 为整数。我们将区间 $[\frac{11}{12}, 1-\frac{c'}{2L_1}]$ 分成 M 等份,分点为 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_M$,即

$$\beta_0=\frac{11}{12}<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_M=\beta'=1-\frac{c'}{2L_1},$$

$$\beta_{i+1}-\beta_i=\Delta, 0\leqslant i\leqslant M-1,$$

其中 Δ 满足 $\Delta\cdot M=\beta'-\beta_0$。设 $y=xT^{-1}$,则(采用定理 2.4.3 中的记号)

$$y S_2 \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} \sum_{3 \leqslant m \leqslant Q_1} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m} \sum_{\substack{|t| \leqslant T \\ \beta_j \leqslant \beta < \beta_{j+1}}} y^{\beta}$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} \sum_{3 \leqslant m \leqslant Q_1} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m} y^{\beta_{j+1}} (N(\beta_j, T, \chi) - N(\beta_{j+1}, T, \chi))$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) (\sum_{3 \leqslant m \leqslant Q_1} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m} N(\beta_j, T, \chi))$$

$$+ y^{\beta_0} (\sum_{3 \leqslant m \leqslant Q_1} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m} N(\beta_0, T, \chi))。$$

应用定理2.4.3,可得

$$y S_2 \ll (\sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} (T Q_1^2)^{k(1-\beta_j)} \cdot (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) + (T Q_1^2)^{k(1-\beta_0)} y^{\beta_0}) (\log L)^3, \tag{43}$$

其中 $k = \frac{7}{2}$。令 $F(u) = e^{u \log y} = y^u$。由Cauchy中值定理,我们有

$$y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j} = F(\beta_{j+1}) - F(\beta_j) = (\beta_{j+1} - \beta_j) F'(\xi_j)$$
$$= \log y \cdot (\beta_{j+1} - \beta_j) e^{\xi_j \log y},$$

其中 $\xi_j \in (\beta_j, \beta_{j+1})$。又由于 $\xi_j - \beta_j \leqslant \beta_{j+1} - \beta_j = \Delta$,所以

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) (T Q_1^2)^{k(1-\beta_j)}$$
$$\ll \log y \cdot (T Q_1^2)^{k + k\Delta} \cdot \sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} (\beta_{j+1} - \beta_j) f(\xi_j),$$

这里 $f(v) = (y (T Q_1^2)^{-k})^v$。因此,令 $M \to +\infty$,由Riemann积分的定义可得

$$\varlimsup_{M \to +\infty} (\sum_{0 \leqslant j \leqslant M-1} (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) (T Q_1^2)^{k(1-\beta_j)}) \ll (\log y) (T Q_1^2)^k \int_{\beta_0}^{\beta'} f(v) \mathrm{d} v$$

$$\ll (T Q_1^2)^k (y (T Q_1^2)^{-k})^{\beta'} \ll y^{\beta'}。 \tag{44}$$

在(43)中令 $M \to +\infty$,由(43)及(44)可得

$$y \cdot S_2 \ll y^{\beta'} (\log L)^3。 \tag{45}$$

由(41)、(42)与(45),可知

$$\sum_{3 \leqslant m \leqslant Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^{*} \widetilde{\sum_{|t| \leqslant T}} (xT^{-1})^{\beta-1} \ll y^{\beta'-1}(\log L)^3 \ll (\log L)^{-2}。\tag{46}$$

由(39)、(40)及(46),我们得

$$\sum\nolimits_7 = O(x(\log L)^{-2})。\tag{47}$$

对于每个固定的 $q, q \leqslant Q_1$,我们可用当 χ 为模 m 的原特征时处理积分

$$\int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 \mathrm{d}z$$

的方法类似地处理积分

$$\int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 \mathrm{d}z,$$

这里 χ_0 为模 q 的主特征。为此,我们需要将 $1 \leqslant n \leqslant x$ 时 $C(n, \chi)$ 的值换成

$$\chi_0(n)\Lambda(n) - 1,$$

并将 σ 换成 $\frac{1}{2}qQ$。于是,与(35)类似地,我们有

$$\begin{aligned}\int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 \mathrm{d}z \ll & \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_2(y) G_2(y)| \mathrm{d}y \\ & + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_2(y)| \mathrm{d}y \\ & + x^2 T^{-1} \sigma^{-2}(\sigma + x),\end{aligned}\tag{48}$$

这时 $\sigma_1 = 1 - \frac{\sigma}{2}, \sigma_2 = x + \frac{\sigma}{2}$,而

$$C_2(y) = \sigma^{-1} \sum_{x_3 \leqslant n \leqslant x_2} (\chi_0(n)\Lambda(n) - 1),$$

$$G_2(y) = \sigma^{-1} \sum_{y_3 \leqslant n \leqslant y_2} (\chi_0(n)\Lambda(n) - 1),$$

$$x_2 = \min\left(x, y + \frac{\sigma}{2}\right), x_3 = \max\left(xT^{-1}, y - \frac{\sigma}{2}\right),$$

$$y_2 = \min(x, y + \frac{\sigma - 1}{2}), y_3 = \max(xT^{-1}, y - \frac{\sigma - 1}{2})。$$

对于使得 $x_3 < x_2$ 的值 y,由定理 1.6.1 的(ii) 我们有

$$\sigma C_2(y) = \sum_{x_3 \leqslant n \leqslant x_2} \Lambda(n) - (x_2 - x_3) + O(L^2)$$

$$= - \sum_{|t| \leqslant T} \frac{1}{\rho}(x_2^\rho - x_3^\rho) + O(\frac{xL^2}{T}),$$

这里 $\sum_{|t| \leqslant T}$ 表示对满足 $\rho = \beta + it$ 及 $|t| \leqslant T$ 的所有 $\zeta(s)$ 的非平凡零点 ρ 求和,其中一个零点是几阶的就重复计算几次。由于

$$\left| \frac{1}{\rho}(x_2^\rho - x_3^\rho) \right| = \left| \int_{x_3}^{x_2} u^{\rho-1} \mathrm{d}u \right|$$

$$\leqslant \int_{x_3}^{x_2} u^{\beta-1} \mathrm{d}u \ll \min(x, \sigma)(xT^{-1})^{\beta-1},$$

所以

$$|C_2(y)| \ll \min(x\sigma^{-1}, 1)(\sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1}) + \sigma^{-1}xT^{-1}L^2。$$

类似地可得

$$|G_2(y)| \ll \min(x\sigma^{-1}, 1)(\sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1}) + \sigma^{-1}xT^{-1}L^2。$$

所以,应用

$$(x + \sigma)(\min(x\sigma^{-1}, 1))^2 \ll x, (x + \sigma)\min(x\sigma^{-1}, 1) \ll x,$$

由(48) 我们有

$$\int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 \mathrm{d}z \ll x(\sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1})^2 + x \cdot \sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1} + (xT^{-1} + x^3 T^{-1}\sigma^{-2})L^2; \tag{49}$$

这里我们已用到估计式

$$(x + \sigma)(\sigma^{-1}xT^{-1}L^2)^2 \ll (x + \sigma)x^2 T^{-1}\sigma^{-2},$$

$$xT^{-1} + x^3 T^{-1}\sigma^{-2} \gg \sqrt{xT^{-1} \cdot x^3 T^{-1}\sigma^{-2}} = x^2 T^{-1}\sigma^{-1}。$$

于是,应用定理 2.3.2 的(viii) 以及 $\sigma = \frac{1}{2}qQ$ 可得

$$\sum_{q \leqslant Q_1} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} \int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 \ll xL\Big(\sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2 + xL\Big(\sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1}\Big) + xL^{-1}。\tag{50}$$

我们仍可用(41) ~ (46) 中的方法,并相应地,应用定理 1.5.8 和定理 2.5.1,去估计求和

$$\sum_{|t| \leqslant T} (xT^{-1})^{\beta-1}$$

因此,若令 $y = xT^{-1}$, $L_2 = \log(T+2)$, $B'' = 1 - c''/(2L_2)$, c'' 为定理 1.5.8 中的常数 c_{16},则类似地有

$$\sum_{|t| \leqslant T} y^{\beta-1} \ll y^{\beta''-1}(\log L)^3 \ll (\log L)^{-2}。\tag{51}$$

由(22)、(47)、(50) 及(51),可得估计

$$\sum\nolimits_1 = O(cxL)。$$

由此估计及(12),设 c 适当地小,则可知定理 3.2.1 成立。**证毕。**

§ 3.3　BDH 均值和的一个显含 L 函数例外零点的渐近展开式

在本节中我们研究 BDH 均值和 $S(Q, x)$ 的渐近性态。令

$$c = \min\Big(\frac{\sqrt{\lambda_1}}{15}, \frac{1}{2}\lambda_2, \frac{\sqrt{\lambda_3}}{13}\Big), P = e^{7c(\log x)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

这里 λ_1 为定理 1.5.2 中的常数 c_2,λ_2 为定理 1.6.1 的(iii) 中的常数 λ_1,而 λ_3 则为定理 1.5.8 中的常数 c_{16}。设当 P – 例外组($\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta}$) 存在时,$\theta = 1$,否则 $\theta = 0$(参见定理 1.5.2 中的定义)。我们的

结果为:

定理 3.3.1　当 $x \geqslant Q \geqslant 3$ 及 $Q \geqslant x\exp(-c(\log x)^{1/2})$ 时,

$$S(Q,x) = Qx\log x + 2\frac{\theta}{\tilde{\beta}}\sum_{m\leqslant x-Q} m^{\tilde{\beta}-1}(x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) \times$$

$$[C(\tilde{q})(\log Q + \gamma) - C_1(\tilde{q})]$$

$$+ 2\theta C(\tilde{q})[\sum_{m\leqslant x-1} m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+1}^{\min(m+Q,x)} u^{\tilde{\beta}-1}\log(u-m)\mathrm{d}u)]$$

$$+ O(Qx(\log x)^{1/2}(\log\log x)^5),$$

此处 γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii)),而当 $\theta = 1$ 时,

$$C(\tilde{q}) = \frac{1}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{\substack{q=1\\(q,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)}),$$

$$C_1(\tilde{q}) = C(\tilde{q})\log\tilde{q} + \frac{1}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{\substack{q=1\\(q,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)\log q}{q\varphi(q)})。\qquad (2)$$

由定理 3.3.1 易得以下的推论:

推论 3.3.2　(i) 当 $x\exp(-c(\log x)^{1/2}) \leqslant Q \leqslant x$ 时,成立着

$$S(Q,x) \geqslant Qx\log x + O(Qx(\log x)^{1/2}(\log\log x)^5)。$$

(ii) 设 δ 为一充分小正的常数,则当

$$x(\log x)^{\delta-3/2} \leqslant Q \leqslant x$$

时,成立着

$$S(Q,x) = Qx\log x + O(Qx(\log x)^{1-\delta/2})$$

推论 3.3.2 的证明:(i) 当 $\theta = 1$ 时,由于

$$\log\tilde{q} \leqslant \log P \ll (\log x)^{1/2}, \log Q \ll \log x,$$

因此,在 x 充分大时,由定理 3.3.1(特别注意(2)) 立即得到本推论(i) 的结论。

(ii) 由定理 1.5.2 可知在 $\theta = 1$ 时

$$1 - \tilde{\beta} \leqslant \lambda_1(\log 2P)^{-1} \leqslant \frac{1}{2\log 2},$$

所以 $\tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{1}{2\log 2}$。由引理 2.4.2(iii) 可得

$$\tilde{S}_1 = \frac{2\theta}{\tilde{\beta}} \sum_{m \leqslant x-Q} m^{\tilde{\beta}-1}(x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}})[C(\tilde{q})(\log Q + \gamma) - C_1(\tilde{q})]$$

$$= O\left(x^{\tilde{\beta}+1}(\log x)\frac{\log \tilde{q}}{\varphi(\tilde{q})}\right) = O(x^{\tilde{\beta}+1}(\log x)^{3/2}(\log\log x)\tilde{q}^{-1}),$$

$$\tilde{S}_2 = 2\theta \cdot C(\tilde{q})\left[\sum_{m \leqslant x-1} m^{\tilde{\beta}-1}\left(\int_{m+1}^{\min(m+Q,x)} u^{\tilde{\beta}-1}\log(u-m)\mathrm{d}u\right)\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{\varphi(\tilde{q})} Qx^{\tilde{\beta}}\log x\right) = O(x^{\tilde{\beta}+1}(\log x)^{3/2}(\log\log x)\tilde{q}^{-1})。$$

由此，在 $\tilde{q} \geqslant (\log x)^{2-\delta/3}$ 时显然可得所需结论。在 $\tilde{q} < (\log x)^{2-\delta/3}$ 时，我们可应用由定理 1.5.13 所保证的不等式

$$1 - \tilde{\beta} \gg \tilde{q}^{-1/2}(\log 2\tilde{q})^{-4},$$

并仍得所需的对 $\tilde{S}_1$ 与 $\tilde{S}_2$ 的估计。**证毕。**

显然，推论 3.3.2 的(i) 所提供的下界是比定理 3.2.1 更为精确的下界(但 Q 的变化范围要小)。

为证定理 3.3.1，我们要先证明几个引理。

引理 3.3.3　(i) 设 $\tau(n)$ 代表除数函数，则

$$\tau(mn) \leqslant \tau(m)\tau(n)。$$

(ii) 设 $f(n)$ 为一个正值数论函数，$x \geqslant 3$，则

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n)f(n) \geqslant 2\sum_{u \leqslant \sqrt{x}} \sum_{v \leqslant x/u} f(uv)。$$

(iii) 设 r 为任意的非负整数，$x \geqslant 3$，则

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{(\tau(n))^r}{n} \ll (\log x)^{2^r},$$

这里 $\ll$ 记号所蕴含的常数与 r 有关。

(iv) 设 r 为任意非负整数，$x \geqslant 3$，则

$$\sum_{n \leqslant x} (\tau(n))^r \ll x(\log x)^{2^r-1},$$

其中 $\ll$ 记号所蕴含的常数与 r 有关。

证明:(i) 设 m 与 n 的最大公因子 (m,n) 的标准素因子分解式为

$$(m,n)=p_1^{b_1}\cdots p_t^{b_t},$$

这里 $p_1,\cdots,p_t$ 为互不相同的素数,b_i 为正整数,$1\leqslant i\leqslant t$。那么 m 与 n 的标准因子分解式为

$$m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}m',\ n=p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}n',\ (m',n')=(m'n',p_1\cdots p_t)=1,$$

其中 $\min(\alpha_i,\beta_i)=b_i$, m' 为 1 或形如 $u_1^{x_1}\cdots u_k^{x_k}$, n' 为 1 或形如 $v_1^{y_1}\cdots v_s^{y_s}$, $p_1,\cdots,p_t,u_1,\cdots,u_k$ 为互不相同的素数, $p_1,\cdots,p_t$, $v_1,\cdots,v_s$ 也为互不相同的素数, $x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_s$ 为一些正整数。因此,当 $m'\neq 1$ 且 $n'\neq 1$ 时

$$\begin{aligned}\tau(mn)&=\prod_{1\leqslant i\leqslant t}(1+\alpha_i+\beta_i)\prod_{1\leqslant j\leqslant k}(1+x_j)\prod_{1\leqslant r\leqslant s}(1+y_r)\\&\leqslant\prod_{1\leqslant i\leqslant t}((1+\alpha_i)(1+\beta_j))\prod_{1\leqslant j\leqslant k}(1+x_j)\prod_{1\leqslant r\leqslant s}(1+y_r)\\&=\tau(m)\tau(n)\end{aligned}$$

当 $m'=1$ 或 $n'=1$ 时,可类似地证明(i) 也成立。

(ii) 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\tau(n)f(n)&=\sum_{uv\leqslant x}f(uv)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{v\leqslant x/u}f(uv)+\sum_{\sqrt{x}<u\leqslant x}\sum_{v\leqslant x/u}f(uv)\\&=\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}\sum_{v\leqslant x/u}f(uv)+\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\leqslant v\leqslant x/u}f(uv)\\&\leqslant 2\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}\sum_{v\leqslant x/u}f(uv)。\end{aligned}$$

(iii) 可用数学归纳法证明。当 $r=0$ 时,由引理 2.3.2 的(xii) 可知结论成立。设结论对 r 成立。由(i)、(ii) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{(\tau(n))^{r+1}}{n}&\leqslant 2\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}\sum_{v\leqslant x/u}\frac{(\tau(uv))^r}{uv}\leqslant 2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{(\tau(n))^r}{n}\Big(\sum_{v\leqslant x/u}\frac{(\tau(v))^r}{v}\Big)\\&\ll\Big(\sum_{u\leqslant x}\frac{(\tau(u))^r}{u}\Big)^2\ll((\log x)^{2^r})^2=(\log x)^{2^{r+1}}。\end{aligned}$$

所以结论对 $r+1$ 也成立。**归纳法完成。**

(iv) 仍用数学归纳法。当 $r=0$ 时，结论显然成立。设结论对 r 成立。由(i)、(ii) 与(iii) 得

$$\sum_{n\leqslant x}(\tau(n))^{r+1}\leqslant 2\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}\sum_{v\leqslant x/u}(\tau(uv))^{r}\leqslant 2\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}(\tau(u))^{r}\Big(\sum_{v\leqslant x/u}(\tau(v))^{r}\Big)$$

$$\ll\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}(\tau(u))^{r}\frac{x}{u}\Big(\log\frac{x}{u}\Big)^{2^{r}-1}$$

$$\ll x(\log x)^{2^{r}-1}\Big(\sum_{u\leqslant\sqrt{x}}\frac{(\tau(u))^{r}}{u}\Big)$$

$$\ll x(\log x)^{2^{r}-1}(\log x)^{2^{r}}$$

$$=x(\log x)^{2^{r+1}-1}。$$

所以结论对 $r+1$ 也成立。**归纳法完成。**

引理 3.3.4 (i) 设 α 为任意实数，M 为正整数，则(其中 $e(\xi)=e^{2\pi i\xi}$)

$$\Big|\sum_{m\leqslant M}e(m\alpha)\Big|\leqslant\min\Big(M,\frac{1}{2\|\alpha\|}\Big),$$

这里 $\|\alpha\|$ 表示 α 与距之最近的整数之间的距离，即 $\|\alpha\|=\min\limits_{n\in\mathbb{Z}}|n-\alpha|$，$\mathbb{Z}$ 为整数全体的集合。

(ii) 设 a 与 q 为互素正整数，$q\geqslant 3$，$M\geqslant 1$，$X>0$，则

$$S_1=\sum_{m\leqslant M}\min\Big(X,\frac{1}{\|ma/q\|}\Big)\ll\Big(\frac{M}{q}+1\Big)(X+q\log q)。$$

(iii) 设 a 与 q 为互素正整数，$q\geqslant 3$，$M\geqslant 1$，$X>0$，则

$$S_2=\sum_{m\leqslant M}\min\Big(\frac{X}{m},\frac{1}{\|ma/q\|}\Big)\ll\Big(\frac{X}{q}+M+q\Big)L^{2},$$

这里 $L=\log(Mq)$。

证明 (i) 先由平凡的估计，可知

$$\Big|\sum_{m\leqslant M}e(m\alpha)\Big|\leqslant M。\tag{3}$$

这已说明所需结论在 α 为整数时成立了。当 α 不为整数时，由等

比级数的求和可得

$$\sum_{m\leqslant M}e(m\alpha)=\frac{e(\alpha)(1-e([M]\alpha))}{1-e(\alpha)}。$$

因为

$$1-e(\alpha)=e(\frac{\alpha}{2})(e(-\frac{\alpha}{2})-e(\frac{\alpha}{2}))=-2ie(\frac{\alpha}{2})\sin(\pi\alpha),$$

应用在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时成立的不等式 $\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin\theta}{\theta}\leqslant 1$,可得

$$\begin{aligned}|\sum_{m\leqslant M}e(m\alpha)| &\leqslant \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|}\\ &=\frac{1}{|\sin(\pi\|\alpha\|)|}\leqslant\frac{1}{2\|\alpha\|}。\end{aligned}\tag{4}$$

由(3)、(4),可知(i)成立。

(ii) 存在非负整数 k,使得 $kq\leqslant M<(k+1)q$。则

$$\begin{aligned}S_1 &\leqslant \sum_{j=0}^{k}\sum_{jq\leqslant m<(j+1)q}\min(X,\frac{1}{\|ma/q\|})\\ &=(k+1)(\sum_{m=0}^{q-1}\min(X,\frac{1}{\|ma/q\|}))。\end{aligned}$$

当 m 过模 q 的一个完全剩余系时,ma 亦然,所以,应用引理2.3.2的(xii)可得

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{q-1}\min(X,\frac{1}{\|ma/q\|}) &= \sum_{n=0}^{q-1}\min(X,\frac{1}{\|h/q\|})\\ &\leqslant X+\sum_{1\leqslant h\leqslant q-1}\frac{1}{\|\frac{h}{q}\|}\\ &\leqslant X+2\sum_{1\leqslant h\leqslant\frac{q}{2}}q/h\ll X+q\log q。\end{aligned}$$

考虑到 $k+1\ll\frac{M}{q}+1$,(ii)得证。

(iii) 若 $M\leqslant q/2$,则因为数 $a,2a,\cdots,[\frac{q}{2}]a$ 模 q 互不同余,且都不为 q 所整除,我们有

$$S_2 \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{q}{2}} \frac{1}{\| ma/q \|} \leqslant \sum_{1 \leqslant r \leqslant q-1} \frac{1}{\| r/q \|} \leqslant 2 \sum_{1 \leqslant t \leqslant \frac{q}{2}} \frac{q}{t} \ll q\log q。$$

设 $M > q/2$。将$[\frac{q}{2}, M]$分入 $O(\log M)$ 个形如 $I_j = [M_j, M_{j+1}]$ 的小区间中，这里

$$M_j = (\frac{q}{2})2^j, 0 \leqslant j \leqslant \log M/\log(q/2),$$

j 为整数。则应用(ii) 可得

$$\begin{aligned} S_2 &\leqslant \sum_j \sum_{m \in I_j} \min(\frac{X}{M_j}, \frac{1}{\| ma/q \|}) \\ &= \sum_j \sum_{1 \leqslant r \leqslant q} \min(\frac{X}{M_j}, \frac{1}{\| r/q \|})(\sum_{\substack{m \in I_j \\ am \equiv r (\bmod q)}} 1) \\ &\ll \sum_j (M_j/q + 1)(\frac{X}{M_j} + q\log q) \\ &\ll \frac{X}{q}\log M + M\log q + q\log q \cdot \log M。\end{aligned}$$

由此即可得(iii)。**证毕。**

引理 3.3.5　设 a 和 q 为互素的正整数，$x \geqslant 3$，α 为实数，$z = \alpha - a/q$，$|z| \leqslant 1/(q\tau)$，$1 \leqslant q \leqslant \tau \leqslant x$。则

$$\begin{aligned} |\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)e(n\alpha)| \ll (\log(Nq))^4(1 + x|z|) \times \\ (x^{4/5} + xq^{-1/2} + (xq)^{1/2} + q)。\end{aligned}$$

证明: 由引理 1.1.3 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)e(n\alpha) &= \sum_{1 < n \leqslant x} \Lambda(n)e(n \cdot \frac{a}{q})e(nz) \\ &= -\int_1^x (\sum_{n \leqslant u} \Lambda(n)e(\frac{na}{q})) \cdot 2\pi iz \cdot e(uz)\mathrm{d}u \\ &\quad + (\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)e(\frac{na}{q})) \cdot e(xz)。\end{aligned}$$

因此，利用定理 1.6.1 的(iii) 做平凡的估计可得

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(n\alpha) = -\int_{x_1}^{x}\Big(\sum_{n\leqslant u}\Lambda(n)e\Big(\frac{na}{q}\Big)\Big)2\pi iz\cdot e(uz)\mathrm{d}u$$

$$+\Big(\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e\Big(\frac{na}{q}\Big)\Big)e(xz)+O(x^{9/5}|z|),\tag{5}$$

其中 $x_1 = x^{4/5}$。由此可见,我们需要估计形如

$$S = \sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)e\Big(\frac{na}{q}\Big)$$

的指数和,其中 $x_1 \leqslant N \leqslant x$。令 $\omega = N^{2/5}$。由 Möbius 函数的性质(见引理 2.3.3 的(iii))可得

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\omega<n\leqslant N}\Lambda(n)e\Big(n\frac{a}{q}\Big)+O(\omega)\\
&= \sum_{\substack{\omega<mn\leqslant N\\ n>\omega}}\Lambda(n)e\Big(mn\frac{a}{q}\Big)\Big(\sum_{d\mid m}\mu(d)\Big)+O(\omega)\\
&= \sum_{\substack{\omega<mn\leqslant N\\ n>\omega}}\Lambda(n)e\Big(mn\frac{a}{q}\Big)\Big(\sum_{\substack{d\mid m\\ d\leqslant\omega}}\mu(d)\Big)\\
&\quad+\sum_{\substack{\omega<mn\leqslant N\\ n>\omega}}\Lambda(n)e\Big(mn\frac{a}{q}\Big)\Big(\sum_{\substack{d\mid m\\ d>\omega}}\mu(d)\Big)+O(\omega)\\
&= I_1+I_2+O(\omega)。
\end{aligned}\tag{6}$$

对于 I_1,我们看到

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{d\leqslant\omega}\sum_{\substack{\omega<rdn\leqslant N\\ n>\omega}}\Lambda(n)\mu(d)e\Big(\frac{drna}{q}\Big)\\
&= \sum_{d\leqslant\omega}\mu(d)\sum_{\omega<kd\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{k=nr\\ n>\omega}}\Lambda(n)\Big)e\Big(\frac{dka}{q}\Big)\\
&= \sum_{d\leqslant\omega}\mu(d)\Big(\sum_{\omega<kd\leqslant N}\log k\cdot e\Big(\frac{dka}{q}\Big)\Big)-\sum_{d\leqslant\omega}\mu(d)\\
&\quad\cdot\Big(\sum_{\omega<kd\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{n\mid k\\ n\leqslant\omega}}\Lambda(n)\Big)e\Big(\frac{dka}{q}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$$= I_{11} - I_{12}; \tag{7}$$

这里我们已用到了等式(见 § 2.3 中(30) 式的推导)

$$\sum_{k=nr}\Lambda(n) = \sum_{n \mid k}\Lambda(n) = \log k。$$

对于 I_{11},我们有

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{d \leqslant \omega}\mu(d)\Big(\sum_{\omega \leqslant kd \leqslant N}\Big(\int_1^k \frac{1}{t}\mathrm{d}t\Big)e\Big(\frac{dka}{q}\Big)\Big) \\ &= \sum_{d \leqslant \omega}\mu(d)\Big(\int_1^{\frac{N}{d}} \frac{1}{t}\Big(\sum_{f(t) < k \leqslant \frac{N}{d}} e\Big(\frac{dka}{q}\Big)\Big)\mathrm{d}t\Big), \end{aligned}$$

这里 $f(t) = \max(\frac{\omega}{d}, t)$。应用引理 3.3.4 的(i) 与(iii),可得

$$\begin{aligned} I_{11} &\ll \sum_{d \leqslant \omega}\int_1^{\frac{N}{d}} \frac{1}{t}\min\Big(\frac{N}{d}, \frac{1}{\| da/q \|}\Big)\mathrm{d}t \\ &\ll (\log N)\sum_{d \leqslant \omega}\min\Big(\frac{N}{d}, \frac{1}{\| da/q \|}\Big) \\ &\ll (\log(Nq))^3(Nq^{-1} + \omega + q)。 \end{aligned} \tag{8}$$

又,应用引理 3.3.4 的(i) 与(iii) 可得

$$\begin{aligned} I_{12} &= \sum_{d \leqslant \omega}\mu(d)\Big(\sum_{\substack{\omega < ntd \leqslant N \\ n \leqslant \omega}}\Lambda(n)e\Big(\frac{dnta}{q}\Big)\Big) \\ &= \sum_{d \leqslant \omega}\mu(d)\Big(\sum_{n \leqslant \omega}\Lambda(n)\Big(\sum_{\frac{\omega}{dn} < t \leqslant \frac{N}{dn}} e\Big(\frac{dtna}{q}\Big)\Big)\Big) \\ &\ll \sum_{d \leqslant \omega}\sum_{n \leqslant \omega}\Lambda(n)\min\Big(\frac{N}{dn}, \frac{1}{\| dna/q \|}\Big) \\ &\ll \sum_{m \leqslant \omega^2}\min\Big(\frac{N}{m}, \frac{1}{\| ma/q \|}\Big)\Big(\sum_{n \mid m}\Lambda(n)\Big) \\ &\ll (\log(Nq))^3(Nq^{-1} + \omega^2 + q)。 \end{aligned} \tag{9}$$

对于 I_2,我们有

$$I_2 = \sum_{\omega < m < N/\omega} c(m)\sum_{\substack{\omega < n < N/\omega \\ mn \leqslant N}}\Lambda(n)e\Big(\frac{mna}{q}\Big),$$

其中 $c(m)=\sum_{\substack{d\mid m\\ d>\omega}}\mu(d)$。将 $(\omega,\frac{N}{\omega})$ 分入 $O(\log N)$ 个形如 $J_i=(2^i\omega,2^{i+1}\omega]$ 的范围中,这里 i 为整数,$0\leqslant i\leqslant\frac{\log(N/\omega^2)}{\log 2}$。则有

$$|I_2|\leqslant\sum_i\sum_{m\in J_i}|c(m)|\cdot|\sum_{\substack{n>\omega\\ mn\leqslant N}}\Lambda(n)e(\frac{mna}{q})|=\sum_i S_i。$$

设 $M_i=2^i\omega$。由 Cauchy 不等式可得

$$S_i^2\leqslant(\sum_{m\in J_i}|c(m)|^2)(\sum_{m\in J_i}|\sum_{\substack{n>\omega\\ mn\leqslant N}}\Lambda(n)e(\frac{mna}{q})|^2)。$$

由引理 3.3.3 的(iv) 和 $|c(m)|\leqslant\tau(m)$,得

$$\sum_{m\in J_i}|c(m)|^2\ll M_i(\log M_i)^3。$$

再令 $N_i=NM_i^{-1}$。应用引理 2.3.2 的(xi) 及引理 3.3.4 的(i) 与(ii),可得

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in J_i}|\sum_{m<n\leqslant N/m}\Lambda(m)e(\frac{mna}{q})|^2\\
&=\sum_{\omega<n_1,n_2<N_i}\Lambda(n_1)\Lambda(n_2)(\sum_{m\in J_i'}e(\frac{m(n_1-n_2)a}{q}))\\
&\ll\sum_{\omega<n_1,n_2\leqslant N_i}\Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\min(M_i,\frac{1}{\|(n_1-n_2)\frac{a}{q}\|})\\
&\ll M_i(\sum_{n\leqslant N_i}(\Lambda(n))^2)+\sum_{1\leqslant k\leqslant N_i}\min(M_i,\frac{1}{\|ka/q\|})(\sum_{\substack{n_1-n_2=k\\ \omega<n_1,n_2\leqslant N_i}}1)\\
&\cdot(\log N_i)^2\ll M_iN_i\log N_i+N_i(\log N_i)^2(\frac{N_i}{q}+1)(M_i+q\log q)\\
&\ll(N+N^2M_i^{-1}q^{-1}+N^2M_i^{-2}+NqM_i^{-1})(\log(Nq))^3,\end{aligned}$$

其中 $J_i'=\{m\mid]m\leqslant\frac{N}{n_1},m\leqslant\frac{N}{n_2}\}\cap J_i$,$J_i'$ 为一个区间。所以

$$S_i^2 \ll (\log(Nq))^6(M_iN + N^2q^{-1} + N^2M_i^{-1} + Nq),$$

$$S_i \ll (\log(Nq))^3((M_iN)^{1/2} + Nq^{-1/2} + NM_i^{-\frac{1}{2}} + (Nq)^{1/2}),$$

$$|I_2| \ll \sum_i S_i \ll (\log(Nq))^4(N\omega^{-1/2} + Nq^{-1/2} + (Nq)^{1/2})。 \tag{10}$$

由(6) ~ (10),我们得

$$S \ll (\log(Nq))^4(Nq^{-1/2} + (Nq)^{1/2} + \omega^2 + N\omega^{-1/2} + q)$$
$$\ll (\log(Nq))^4(Nq^{-1/2} + (Nq)^{1/2} + N^{4/5} + q)。 \tag{11}$$

由(5) 及(11),我们得

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(n\alpha)\right| \ll (1 + x|z|)\max_{x_1\leqslant u\leqslant x}\left|\sum_{n\leqslant u}\Lambda(n)e\left(\frac{na}{q}\right)\right|$$
$$+ x^{9/5}|z| \ll (\log(Nq))^4(xq^{-\frac{1}{2}} + (xq)^{\frac{1}{2}} + x^{4/5} + q)\times (1 + x|z|)。$$

证毕。

引理 3.3.6　设 $\xi \geqslant 1$, k、t、q、p 为整数, $k \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $(tk,q) = 1$, $p \geqslant 1$,且 $p|k$,则有

(i) $$\sum_{\substack{u\leqslant\xi\\(u,k)=p\\u\equiv t(\bmod q)}} 1 = \frac{\xi}{kq}\varphi\left(\frac{k}{q}\right) + O\left(\tau\left(\frac{k}{p}\right)\right)。$$

(ii) $$\sum_{\substack{u\leqslant\xi\\(u,k)=p}} \frac{1}{u} = \frac{\varphi(k/p)}{k}\left(\log\frac{\xi}{p} + \gamma\right) - \frac{1}{p}\sum_{t\mid\frac{k}{p}}\frac{\mu(t)\log t}{t}$$
$$+ O\left(\frac{1}{\xi}\tau\left(\frac{k}{p}\right)\right),$$

这里 γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii))。

(iii) 设 $0 < \alpha < 1$, $\xi \geqslant 1$,则

$$\sum_{r\leqslant\xi} r^{-\alpha} \ll \xi^{1-\alpha}, \sum_{r>\xi} r^{-1-\alpha} \ll \xi^{-\alpha}。$$

证明:(i) 由引理 2.3.3 的(iii) 和(i),我们有

$$\sum_{\substack{u\leqslant\xi\\(u,k)=p\\u\equiv t(\bmod q)}}1=\sum_{\substack{m\leqslant\xi/p\\(m,\frac{k}{p})=1\\m\equiv t_0(\bmod q)}}1=\sum_{\substack{m\leqslant\xi/p\\m\equiv t_0(\bmod q)}}(\sum_{t\mid(m,\frac{k}{p})}\mu(t))$$

$$=\sum_{t\mid\frac{k}{p}}\mu(t)(\sum_{\substack{n\leqslant\xi/(pt)\\n\equiv t_1(\bmod q)}}1)$$

$$=\sum_{t\mid\frac{k}{p}}\mu(t)(\frac{\xi}{qpt}+O(1))$$

$$=\frac{\xi}{qk}\varphi(\frac{k}{p})+O(\tau(\frac{k}{p})),$$

这里 t_0 和 t_1 为适当的整数。

(ii) 引理2.3.2的(xii)当$0<x<1$时也成立,这是因为这时

$$-\log x=\log\frac{1}{x}\ll e^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}。$$

所以,由引理2.3.3的(iii)与(i)可得

$$\sum_{\substack{u\leqslant\xi\\(u,k)=p}}\frac{1}{u}=\frac{1}{p}\sum_{\substack{u\leqslant\xi/p\\(u,\frac{k}{p})=1}}\frac{1}{u}=\frac{1}{p}\sum_{u\leqslant\xi/p}\frac{1}{u}(\sum_{t\mid(u,k/q)}\mu(t))$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{t\mid\frac{k}{p}}\frac{\mu(t)}{t}(\sum_{m\leqslant\xi/(pt)}\frac{1}{m})=\frac{1}{p}\sum_{t\mid\frac{k}{p}}\frac{\mu(t)}{t}(\log\frac{\xi}{p}+$$

$$\gamma-\log t+O(\frac{pt}{\xi}))$$

$$=\frac{\varphi(k/p)}{k}(\log\frac{\xi}{p}+\gamma)-\frac{1}{p}\sum_{t\mid\frac{k}{p}}\frac{\mu(t)\log t}{t}+$$

$$O(\frac{1}{\xi}\tau(\frac{k}{p}))。$$

(iii) 无妨设 $\xi\geqslant 3$。设 $X=[\xi]$。则

$$\sum_{r\leqslant\xi}r^{-\alpha}\leqslant 1+\sum_{n=1}^{X-1}(\int_n^{n+1}u^{-\alpha}\mathrm{d}u)\leqslant 1+\int_1^{\xi}u^{-\alpha}\mathrm{d}u\ll\xi^{1-\alpha},$$

$$\sum_{r>\xi}r^{-1-\alpha}\leqslant\sum_{n\geqslant X}\int_n^{n+1}u^{-\alpha-1}\mathrm{d}u=\int_X^{\infty}u^{-\alpha-1}\mathrm{d}u\ll X^{-\alpha}\ll\xi^{-\alpha}。$$

证毕。

引理3.3.7 设 $x \geqslant Y \geqslant 1, 1 \leqslant q, n \leqslant P, q$ 和 n 为整数，$(n, q) = 1, c_q(r)$ 和 $c_n(r)$ 为 Ramanujan 和(见定理1.2.3的(iii))，χ 为模 q 的非主特征，$\tau_Q(r)$ 对于正整数 r 定义为

$$\tau_Q(r) = \sum_{\substack{d \mid r \\ 1 \leqslant d \leqslant Q}} 1$$

这里 P 和 Q 分别满足(1)以及定理3.3.1中的假设条件。则有

(i) $$\sum_{r \leqslant Y} \tau_Q(r) c_q(r) = Y \frac{\varphi(q)}{q} [\log(\min(Y, Q)) + \gamma - \log q] + O(Q \frac{q^2}{\varphi(q)})。$$

(ii) 当 $q \geqslant 3$ 时，

$$\sum_{r \leqslant Y} \tau_Q(r) c_n(r) \chi(r) = O(Q\varphi(qn)(\log\log(6n))^2)。$$

证明：(i) 由定理1.2.3的(iii)，我们有

$$\sum_{r \leqslant Y} c_q(r) \tau_Q(r) = \sum_{r \leqslant Y} \frac{\varphi(q) \mu(\frac{q}{(r, q)})}{\varphi(q/(r, q))} \tau_Q(r)$$
$$= \varphi(q)(\sum_{d \mid q} \mu(d)/\varphi(d)(\sum_{\substack{r \leqslant Y \\ (r, q) = q/d}} \tau_Q(r))),$$

并且

$$\sum_{\substack{r \leqslant Y \\ (r, q) = q/d}} \tau_Q(r) = \sum_{m \leqslant Y^{1/2}} \sum_{\substack{n \leqslant Y/m \\ (mn, q) = q/d}} 1 + \sum_{n \leqslant Y^{1/2}} \sum_{\substack{m \leqslant \min(Y/n, Q) \\ (mn, q) = q/d}} 1 - \sum_{m \leqslant Y^{1/2}} \sum_{\substack{n \leqslant Y^{1/2} \\ (mn, q) = q/d}} 1$$
$$= S_1 + S_2 - S_3。 \tag{12}$$

假设 $Y \geqslant q^2$。由引理3.3.6的(i)与(ii)我们得

$$S_1 = \sum_{u \mid \frac{q}{p}} \sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} \sum_{\substack{(n, \frac{q}{u}) = \frac{q}{du} \\ n \leqslant \frac{Y}{m}}} 1 = \sum_{u \mid \frac{q}{p}} \sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} (\frac{Yu}{mq} \varphi(d) + O(\tau(d)))$$

$$= Y \frac{\varphi(d)}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{p}} u (\sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} \frac{1}{m}) + O(\tau(d) \sum_{u \mid \frac{q}{p}} (\frac{Y^{1/2}}{q} \varphi(\frac{q}{u})))$$

$$= Y\frac{\varphi(d)}{q}\sum_{u\mid\frac{q}{p}}u\Big[\frac{\varphi(q/u)}{q}\Big(\log\frac{Y^{1/2}}{u}+\gamma\Big)-\frac{1}{u}\sum_{t\mid\frac{q}{u}}\frac{\mu(t)\log t}{t}$$

$$+O\Big(Y^{-1/2}\tau\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)\Big]+O\Big(\frac{\tau(d)Y^{1/2}}{q}\sum_{u\mid\frac{q}{d}}\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)$$

$$= Y\frac{\varphi(d)}{q^2}(\log Y^{1/2}+\gamma)\Big(\sum_{u\mid\frac{q}{d}}u\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)$$

$$-Y\frac{\varphi(d)}{q^2}\Big(\sum_{u\mid\frac{q}{d}}u\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\log u\Big)$$

$$-Y\frac{\varphi(d)}{q}\sum_{u\mid\frac{q}{p}}\sum_{t\mid\frac{q}{u}}\frac{\mu(t)\log t}{t}$$

$$+O\Big(Y^{1/2}\frac{\varphi(d)}{q}\sum_{u\mid\frac{q}{d}}u\tau\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)+O\Big(\frac{\tau(d)}{q}Y^{1/2}\sum_{u\mid\frac{q}{p}}\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)。$$

并且这里(使用引理 2.3.3 的(ii))

$$Y^{1/2}\frac{\varphi(d)}{q}\Big(\sum_{u\mid\frac{q}{d}}u\tau\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)+Y^{1/2}\frac{\tau(d)}{q}\Big(\sum_{u\mid\frac{q}{d}}\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big)$$

$$\ll Y^{1/2}\frac{\varphi(d)}{q}\cdot\frac{q}{d}\cdot\tau^2(q)+Y^{1/2}\cdot\frac{\tau(d)}{q}\cdot q$$

$$\ll Y^{1/2}\tau^2(q)。$$

令 $Y_1=\min(Y,Q)$,则由引理 3.3.6 的(i) 与(ii),引理 2.3.3 的(ii),以及引理 2.3.2 的(ii),我们有

$$S_2=\sum_{u\mid\frac{q}{d}}\sum_{\substack{m\leqslant Y_1\\(m,q)=u}}\sum_{\substack{n\leqslant\min(Y^{1/2},Y/m)\\(n,\frac{q}{u})=\frac{q}{du}}}1=\sum_{u\mid\frac{q}{d}}\Big(\sum_{\substack{m\leqslant Y^{1/2}\\(m,q)=u}}\sum_{\substack{n\leqslant Y^{1/2}\\(n,\frac{q}{u})=\frac{q}{du}}}1$$

$$+ \sum_{\substack{Y^{1/2} < m < Y_1 \\ (m,q)=u}} \sum_{\substack{n \leqslant Y/m \\ (n,\frac{q}{u})=\frac{q}{du}}} 1)$$

$$= \sum_{u \mid \frac{q}{d}} [\sum_{\substack{m \leqslant Y^{1/2} \\ (m,q)=u}} (Y^{1/2}\varphi(d)\frac{u}{q} + O(\tau(d)))$$

$$+ \sum_{\substack{Y^{1/2} < m \leqslant Y_1 \\ (m,q)=u}} (\frac{Yu}{mq}\varphi(d) + O(\tau(d)))]$$

$$= \sum_{u \mid \frac{q}{d}} [Y^{1/2}\frac{\varphi(d)u}{q}(\sum_{\substack{m \leqslant Y^{1/2} \\ (m,q)=u}} 1) + \frac{Y\varphi(d)u}{q}(\sum_{\substack{Y^{1/2} < m \leqslant Y_1 \\ (m,q)=u}} \frac{1}{m}) +$$

$$O(\tau(d)\frac{Y_1}{q}\varphi(\frac{q}{u}))]$$

$$= Y^{1/2}\frac{\varphi(d)}{q}\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u(\frac{Y^{1/2}}{q}\varphi(\frac{q}{u}) + O(\tau(\frac{q}{u})))$$

$$+ \frac{Y\varphi(d)}{q}\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u(\frac{\varphi(q/u)}{q}(\log(\frac{Y_1}{Y^{1/2}}))$$

$$+ O(\frac{1}{Y^{1/2}}\tau(\frac{q}{u})) + O(\tau(d))\frac{Y_1}{q}\sum_{u \mid \frac{q}{d}}\varphi(\frac{q}{u}))$$

$$= Y\frac{\varphi(d)}{q^2}\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi(\frac{q}{u}) + \frac{Y\varphi(d)}{q^2}\log(\frac{Y_1}{Y^{1/2}})\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi(\frac{q}{u}) +$$

$$+ O(Q\tau(d)),$$

以及

$$S_3 = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{(m,q)=u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} \sum_{\substack{n \leqslant Y^{1/2} \\ (n,\frac{q}{u})=\frac{q}{du}}} 1 = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{(m,q)=u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} [Y^{1/2}\frac{\varphi(d)}{q}u + O(\tau(d))]$$

$$= \sum_{u \mid \frac{q}{d}} Y^{1/2}\frac{\varphi(d)}{q}u(\sum_{\substack{(m,q)=u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} 1) + O((\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{(m,q)=u \\ m \leqslant Y^{1/2}}} 1)\tau(d))$$

$$= \sum_{u \mid \frac{q}{d}} Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} u\left(\frac{Y^{1/2}}{q} \varphi\left(\frac{q}{u}\right) + O\left(\tau\left(\frac{q}{u}\right)\right)\right) +$$

$$+ O\left(\tau(d) \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \left(Y^{1/2} \varphi\left(\frac{q}{u} \frac{1}{q}\right)\right)\right)$$

$$= Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi\left(\frac{q}{u}\right) + O(Y^{1/2} \tau^2(q))。$$

因此，由(12)并应用引理 2.3.3 的(iii)，可得

$$\sum_{\substack{r \leqslant Y \\ (r,q) = \frac{q}{d}}} \tau_Q(r) = Y \frac{\varphi(d)}{q^2} (\log Y_1 + \gamma)\left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi\left(\frac{q}{u}\right)\right)$$

$$- Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi\left(\frac{q}{u}\right) \log u\right)$$

$$- Y \frac{\varphi(d)}{q} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{t \mid \frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t}\right) + O(Q\tau(d)),$$

$$\sum_{r \leqslant Y} c_q(r) \tau_Q(r) = \varphi(q) \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \Bigg[Y \frac{\varphi(d)}{q^2} (\log Y_1$$

$$+ \gamma)\left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi\left(\frac{q}{u}\right)\right)$$

$$- Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi\left(\frac{q}{u}\right) \log u\right)$$

$$- Y \frac{\varphi(d)}{q} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{t \mid \frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t}\right) + O(Q\tau(d)) \Bigg]$$

$$= Y \frac{\varphi(q)}{q^2} (\log Y_1 + \gamma)\left(\sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u\varphi\left(\frac{q}{u}\right)\right) -$$

$$Y\frac{\varphi(d)}{q^2}\Big(\sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{u\mid \frac{q}{d}}u\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\log u\Big)$$

$$-Y\frac{\varphi(q)}{q}\Big(\sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{u\mid \frac{q}{d}}\sum_{t\mid \frac{q}{u}}\frac{\mu(t)\log t}{t}\Big)$$

$$+O\Big(Q\varphi(q)\Big(\sum_{d\mid q}\frac{|\mu(d)|}{\varphi(d)}\tau(d)\Big)\Big)$$

$$=Y\frac{\varphi(q)}{q^2}(\log Y_1+\gamma)\sum_{u\mid q}u\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\Big(\sum_{d\mid \frac{q}{u}}\mu(d)\Big)$$

$$-Y\frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{u\mid q}u\varphi\Big(\frac{q}{u}\Big)\log u\Big(\sum_{d\mid \frac{q}{u}}\mu(d)\Big)$$

$$-Y\frac{\varphi(q)}{q}\Big(\sum_{t\mid q}\frac{\mu(t)\log t}{t}\sum_{u\mid \frac{q}{t}}\sum_{d\mid \frac{q}{u}}\mu(d)\Big)$$

$$+O(Q\varphi(q))\prod_{p\mid q}\Big(1+\frac{2}{p-1}\Big)\Big)$$

$$=Y\frac{\varphi(q)}{q}(\log Y_1+\gamma)-Y\frac{\varphi(q)}{q}\log q$$

$$+O\Big(Q\frac{q^2}{\varphi(q)}\Big);\qquad(13)$$

这里在最后一步,我们用到了不等式

$$\prod_{p\mid q}\Big(1+\frac{2}{p-1}\Big)\leqslant\prod_{p\mid q}\Big(1+\frac{1}{p-1}\Big)^2=\frac{q^2}{\varphi^2(q)}。$$

(13)是在 $Y\geqslant q^2$ 时导出的,这说明引理3.5.4在 $Y\geqslant q^2$ 时成立。若 $Y\leqslant q^2$,则由 $q\leqslant P\leqslant Q(\log x)^{-2}$ 及引理3.3.3的(iv),我们有

$$Y\frac{\varphi(q)}{q}(\log Y_1+\gamma)-Y\frac{\varphi(q)}{q}\log q\ll Q\frac{q^2}{\varphi(q)},$$

$$\sum_{r\leqslant Y}\tau_Q(r)c_q(r)\ll\varphi(q)\sum_{r\leqslant q^2}\tau(r)\ll q^3\log q\ll Q\frac{q^2}{\varphi(q)},$$

所以这时引理 3.3.7(i) 仍成立。

(ii) 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{r\leqslant Y}\tau_Q(r)c_n(r)\chi(r)&=\sum_{\substack{ab\leqslant Y\\a\leqslant Q}}\chi(a)\chi(b)c_n(ab)\\&=\sum_{a\leqslant Q}\chi(a)\sum_{b\leqslant Y_1}\chi(b)c_n(ab)\\&=\sum_{a\leqslant Q}\chi(a)\sum_{\substack{k=1\\(k,q)=1}}^{q}\chi(k)(\sum_{\substack{b\leqslant Y_1\\b\equiv k(\bmod q)}}c_n(ab)),\end{aligned}\tag{14}$$

这里 $Y_1=Y/a$。令 $n_1=n/(n,a)$。由引理 3.3.6 的(i) 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{b\leqslant Y_1\\b\equiv k(\bmod q)}}c_n(ab)&=\varphi(n)\sum_{d\mid n_1}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}(\sum_{\substack{(b,n_1)=n_1/d\\b\equiv k(\bmod q)\\b\leqslant Y_1}}1)\\&=\varphi(n)\sum_{d\mid n_1}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}(\frac{Y_1}{qn_1}\varphi(d)+O(\tau(d)))\\&=\frac{\varphi(n)Y_1}{qn_1}\sum_{d\mid n_1}\mu(d)+O(\varphi(n)\sum_{d\mid n}\frac{|\mu(d)\tau(d)|}{\varphi(d)})。\end{aligned}\tag{15}$$

由引理 2.3.3 的(i) 及引理 2.4.2 的(iii),可知

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}\frac{|\mu(d)\tau(d)|}{\varphi(d)}&=\prod_{p\mid n}(1+\frac{2}{p-1})\leqslant\prod_{p\mid n}(1+\frac{1}{p-1})^2\\&=(\frac{n}{\varphi(n)})^2=O((\log\log6n)^2)。\end{aligned}$$

又,由于 $q\geqslant3$, χ 为模q 的非主特征,所以由定理 1.2.2 的(iii) 可知

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,q)=1}}^{q} \chi(k) = 0。$$

因此,由(14)及(15)可得

$$\sum_{r\leqslant Y}\tau_Q(r)c_n(r)\chi(r) = O(Q\varphi(qn)(\log\log 6n)^2)。$$

证毕。

现在我们来证明定理 3.3.1。我们有

$$\begin{aligned} S(Q,x) &= \sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{n_1\equiv n_2(\bmod q)\\ n_i\leqslant x,(n_i,q)=1\\ i=1,2}}\Lambda(n_1)\Lambda(n_2) - \sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\leqslant x}}\Lambda(n)\Big)^2 \\ &= \sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}(\Lambda(n))^2 \\ &\quad + 2\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant x-1\\ q\mid r}}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x-r\\(n(n+r),q)=1}}\Lambda(n)\Lambda(n+r) \\ &\quad - \sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\leqslant x}}\Lambda(n)\Big)^2。 \end{aligned}\tag{16}$$

由定理 1.6.1(iii)、引理 2.3.2 的(xi)、及引理 3.2.3,我们分别有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n) = \psi(x) + O(L^2) = x + O(xe^{-2c\sqrt{L}}),$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda^2(n) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda^2(n) + O(L^3) = x\log x + O(x),$$

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)} = c_1\log Q + c_1\gamma - c_2 + O\Big(\frac{(\log Q)^2}{Q}\Big),$$

其中 $L = \log x$,γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii)),而

$$c_1 = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)},\ c_2 = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{|\mu(d)|\log d}{d\varphi(d)}。$$

显然

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x-r\\(n(n+r),q)>1}}\Lambda(n)\Lambda(n+r)\ll L^2(\sum_{\substack{p^m\leqslant x\\p\mid q}}1)\ll L^3。$$

所以,应用引理 3.3.3 的(iv)可得

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant x-1\\q\mid r}}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x-r\\(n(n+r),q)=1}}\Lambda(n)\Lambda(n+r)$$

$$=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant x-1\\q\mid r}}\sum_{1\leqslant n\leqslant x-r}\Lambda(n)\Lambda(n+r)+O(L^3\sum_{r\leqslant x}\tau(r))$$

$$=\sum_{1\leqslant r\leqslant x-1}\tau_Q(r)(\sum_{1\leqslant n\leqslant x-r}\Lambda(n)\Lambda(n+r))+O(xL^4),$$

其中 $\tau_Q(r)=\sum_{\substack{q\mid r\\1\leqslant q\leqslant Q}}1$。于是,由(16)我们得

$$S(Q,x)=xQ\log x-x^2(c_1\log Q+c_1\gamma-c_2)+2(\sum)+O(Qx),\tag{17}$$

这里

$$\sum=\sum_{r\leqslant x-1}\tau_Q(r)(\sum_{1\leqslant n\leqslant x-r}\Lambda(n)\Lambda(n+r))。$$

我们可用圆法对 $\sum$ 加以处理。令 $\tau=xP^{-4/3}$,P 由(1)给出。对于满足 $(a,q)=1$ 及 $1\leqslant q\leqslant q\leqslant P$ 的正整数 a 与 q,令 $m(q,a)$ 为如下的闭区间

$$m(q,a)=[\frac{a}{q}-(q\tau)^{-1},\frac{a}{q}+(q\tau)^{-1}],$$

并设 m 为所有这种区间的并集,而 B 为 m 在区间 $[\tau^{-1},1+\tau^{-1}]$ 中的补集。容易证明:若 $\frac{a}{q}\neq\frac{a'}{q'}$,$(a,q)=(a',q')=1$,$1\leqslant a\leqslant q\leqslant P$,$1\leqslant a'\leqslant q'\leqslant P$,则 $m(q,a)$ 与 $m(q',a')$ 是互不相交的。由于 m 是一些互不相交的包含于 $[\tau^{-1},1+\tau^{-1}]$ 中的闭区间组成的,所以 B 也是由一些区间构成的。简记 $E=\tau^{-1}$。设

$$S(\alpha)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(n\alpha),e(\xi)=\exp(2\pi i\xi),$$

则

$$\sum_{n \leqslant x-r} \Lambda(n)\Lambda(n+r) = \int_E^{1+E} |S(\alpha)|^2 e(-r\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_m + \int_B 。 \tag{18}$$

设

$$\widetilde{S}(\alpha) = \sum_{r \leqslant x-1} \tau_Q(r) e(-r\alpha)。$$

可与 § 3.2 的(2) 与(3) 之间的讨论类似地证明：对任一$\alpha \in B$，都存在正有理数 a/q，$(a,q)=1$，且 $a=q+1$，$q=[\tau]$ 或 $1 \leqslant a \leqslant q$，$P \leqslant q \leqslant \tau$，使得

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}。$$

若 $a=q+1$，$q=[\tau]$，则由 $\left|(\alpha-1)-\frac{1}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}$ 及引理3.3.5可得

$$S(\alpha) = S(\alpha-1) \ll (1+x\tau^{-2})(x\tau^{-1/2}+x^{4/5}+(x\tau)^{1/2}+\tau)L^4$$
$$\ll (x\tau)^{1/2}L^4 = xP^{-1/2}L^4。$$

若 $1 \leqslant a \leqslant q$，$P \leqslant q \leqslant \tau$，则由 $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}$ 及引理 3.3.5 可得估计

$$S(\alpha) \ll (1+P^{-1}\tau^{-1}x)(xP^{-1/2}+x^{4/5}+(x\tau)^{1/2}+\tau)L^4$$
$$\ll xP^{-1/6}L^4。$$

因此，由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{r \leqslant x-1} \tau_Q(r) \int_B |S(\alpha)|^2 e(-r\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$\ll (\max_{\alpha \in B}|S(\alpha)|)\int_E^{1+E}|S(\alpha)\widetilde{S}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha$$
$$\ll xP^{-1/6}L^4 J_1^{1/2} J_2^{1/2} \tag{19}$$

这里(分别应用引理 2.3.2 的(xi) 与引理 3.3.3 的(iv))

$$J_1 = \int_E^{1+E} |S(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha = \sum_{n \leqslant x} (\Lambda(n))^2 \ll xL,$$

$$J_2 = \int_E^{1+E} |\tilde{S}(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha = \sum_{n \leqslant x} (\tau_Q(n))^2 \ll \sum_{n \leqslant x} (\tau(n))^2 \ll xL^3。$$

由(17) ~ (19) 我们得

$$\sum = \sum_{r \leqslant x-1} \tau_Q(r) \int_m |S(a)|^2 e(-r\alpha) \mathrm{d}\alpha + O(Qx)。\quad (20)$$

对于一个正整数 $q, q \leqslant P$,令

$$\theta(q) = \begin{cases} 1, 若\ \theta = 1\ 且\ \tilde{q} | q, \\ 0, 否则, \end{cases}$$

这里 θ 的定义为:若 P - 例外组$(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 存在,则 $\theta = 1$,否则 $\theta = 0$(关于 P - 例外组的定义,见定理 1.5.2)。对模 q 的任一特征 χ 及实数 z,令

$$S(\chi, z) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \chi(n) e(nz), \tau(\chi) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant q} \chi(h) e\left(\frac{h}{q}\right),$$

这里 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和。又令

$$F(\chi_q^0, z) = S(\chi_q^0, z) - R(z), R(z) = \sum_{n \leqslant x} e(nz),$$

这里 χ_q^0 为模 q 的主特征。若 $\theta(q) = 0$,令

$$F(\chi, z) = S(\chi, z), \chi \neq \chi_q^0,$$

而若 $\theta(q) = 1$,则令

$$F(\tilde{\chi}\chi_q^0, z) = S(\tilde{\chi}\chi_q^0, z) + \tilde{R}(z), \tilde{R}(z) = \sum_{m \leqslant z} m^{\tilde{\beta}-1} e(mz),$$

$$F(\chi, z) = S(\chi, z), x \neq x_q^0, \chi \neq \tilde{\chi}\chi_q^0。$$

当 $\alpha = \frac{a}{q} + z, 1 \leqslant a \leqslant q \leqslant P, (a, q) = 1$ 且 $|z| \leqslant (q\tau)^{-1}$ 时,可与 §3.2 的(14) 同样地得

$$S(\alpha) = \frac{\mu(\ {}^{q}\ )}{\varphi(q)} R(z) - \frac{\theta(\ {}^{q}\ ) \tau(\tilde{\chi}\chi_q^0) \tilde{\chi}(a) \tilde{R}(z)}{\varphi(q)}$$

$$+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\tau(\widetilde{\chi})\chi(a)F(\chi,z)+O(L^2)。$$

由此可得

$$\begin{aligned}
|S(\alpha)|^2 &= \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}|R(z)|^2+\theta(q)\frac{|\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)|^2|\widetilde{R}(z)|^2}{\varphi^2(q)} \\
&\quad -\frac{\theta(q)\mu(q)\overline{R(z)}\widetilde{R}(z)\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)}{\varphi^2(q)} \\
&\quad -\frac{\theta(q)\mu(q)R(z)\widetilde{\chi}(a)\overline{\tau}(\widetilde{\chi}\chi_q^0)\overline{\widetilde{T}(z)}}{\varphi^2(q)} \\
&\quad +O\Big(\frac{|\mu(q)||R(z)|}{\varphi^2(q)}\Big|\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|\Big) \\
&\quad +O\Big(\frac{\theta(q)|\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)\widetilde{R}(z)|}{\varphi^2(q)}\Big|\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|\Big) \\
&\quad +O\Big(\frac{1}{\varphi^2(q)}\Big|\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|^2\Big) \\
&\quad +O\Big(\Big(\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}|R(z)|+\frac{\theta(q)|\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)\widetilde{R}(z)|}{\varphi(q)} \\
&\quad +\frac{1}{\varphi(q)}\Big|\sum_{\chi \bmod q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|\Big)L^2\Big)+O(L^4) \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant 4}S_i+O\Big(\sum_{5\leqslant i\leqslant 11}|S_i|\Big)。
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式，可知 $S_7+S_{11}\gg S_{10}$。所以我们只要处理 $S_i,i\neq 10$。令 $I(q)$ 为闭区间 $[-(q\tau)^{-1},(q\tau)^{-1}]$，我们得

$$\int_m |S(\alpha)|^2 e(-r\alpha)\mathrm{d}\alpha =$$

$$\sum_{q\leqslant P}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\int_{I(q)}\Big|S\Big(z+\frac{a}{q}\Big)\Big|^2 e\Big(-r\Big(\frac{a}{q}+z\Big)\Big)\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{q\leqslant P}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}e\Big(-\frac{ra}{q}\Big)\int_{I(q)}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant 4}S_i+O\Big(\sum_{\substack{5\leqslant i\leqslant 11\\ i\neq 10}}|S_i|\Big)\Big)e(-rz)\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant 4}\sum_{q\leqslant P}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}} e\left(-\frac{ra}{q}\right)\int_{I(q)} S_i e(-rz)\mathrm{d}z$$

$$+ O\Big(\sum_{\substack{5\leqslant i\leqslant 11\\ i\neq 10}}\sum_{q\leqslant P}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\int_{I(q)} |S_i|\mathrm{d}z\Big)$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant 4} T_i + O\Big(\sum_{\substack{5\leqslant i\leqslant 11\\ i\neq 10}} |T_i|\Big)。\tag{21}$$

我们估计 T_5。由 Cauchy 不等式可得

$$T_5 \ll \Big(\sum_{q\leqslant P}\frac{1}{\varphi(q)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{q\leqslant P}\varphi(q)\Big(\int_{I(q)}\Big(\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}|S_5|\Big)\mathrm{d}z\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}。$$

由引理 3.2.3 可知

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{1}{\varphi(q)} \ll \log P \ll (\log x)^{1/2} = L^{1/2}。$$

再应用关于积分的 Cauchy 不等式，对固定的 q，又得

$$\Big(\int_{I(q)}\Big(\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}|S_5|\Big)\mathrm{d}z\Big)^2 \leqslant \frac{1}{\varphi^4(q)}\cdot I_1\cdot I_2,$$

其中

$$I_1 = \int_{I(q)}|R(z)|^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|R(z)|^2\mathrm{d}z = x + O(1),$$

$$I_2 = \int_{I(q)}\Big(\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\Big|\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|\Big)^2\mathrm{d}z$$

$$\leqslant \varphi^2(q)\Big(\int_{I(q)}\Big(\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}|\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)|^2\Big)\mathrm{d}z\Big);$$

这里我们已用到（可由 Cauchy 不等式及特征的性质得到）

$$\Big(\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\Big|\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|\Big)^2$$

$$\leqslant \varphi(q)\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\Big|\sum_{\chi\mathrm{mod}\ q}\chi(a)\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)\Big|^2$$

$$= \varphi^2(q)\sum_{\chi \bmod q} |\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)|^2。$$

因此

$$T_5 \ll x^{1/2}\cdot L^{1/2}\cdot \Big(\sum_{q\leqslant P}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\int_{I(q)}\Big(\sum_{\chi \bmod q}|\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)|^2\Big)\mathrm{d}z\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}。\tag{22}$$

接下去,可与 §3.2 的(21) 与(22) 之间的那个估计类似地得(又参见 §3.2 的(18))

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\int_{I(q)}\Big(\sum_{\chi \bmod q}|\tau(\overline{\chi})F(\chi,z)|^2\Big)\Big)\mathrm{d}z$$

$$\ll \sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\Big(\int_{I(q)}|F(\chi_q^0,z)|^2\mathrm{d}z\Big) + L\cdot T_{51} + PL^4\tau^{-1},\tag{23}$$

其中

$$T_{51} = \sum_{3\leqslant m\leqslant P}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m}\Big(\int_{I(m)}|F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z\Big)。$$

对于给定的正整数 m,$3\leqslant m\leqslant P$,及模 m 的任一原特征 χ,我们可与 §3.2 的(38) 类似地得到

$$\int_{I(m)}|F(\chi,z)|^2\mathrm{d}z \ll x\Big[\Big(\widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2 + \widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big] + (1+x\sigma^{-1})^2L^2T^{-1}x,\tag{24}$$

其中 $T = P^5 = \exp(35c(\log x)^{\frac{1}{2}})$,$\sigma = \frac{1}{2}m\tau$,$\widetilde{\sum\limits_{|t|\leqslant T}}$ 表示对于 $L(s,\chi)$ 的所有满足 $\rho=\beta+it$,$|t|\leqslant T$ 及 $\rho\neq\tilde{\beta}$,$1-\tilde{\beta}$ 的非平凡零点 ρ 求和,$\tilde{\beta}$ 为 P – 例外零点(当然可能 $\tilde{\beta}$ 不存在,定义见定理1.5.2)。接下去,我们又可与 §3.2 的(41) ~ (46) 类似地证得(应用本节(1))

$$\sum_{3\leqslant m\leqslant P}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m}\ \widetilde{\sum_{|t|\leqslant T}} y^{\beta-1} \ll P^2Ty^{-1/12}L + y^{\beta'-1}(\log L)^3$$

$$\ll P^{-1/3}, \tag{25}$$

这里 $y = xT^{-1}, \beta' = 1 - \frac{c_2}{2L_1}, L_1 = \log(P(T+2)), c_2$ 即为定理 1.5.2 中的常数。由(24) 与(25),我们得

$$T_{51} \ll x\Big(\sum_{3\leq m\leq P}\ \sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\ \widetilde{\sum_{|t|\leq T}}\ y^{\beta-1}\Big)^2 + x\Big(\sum_{3\leq m\leq P}\ \sum_{\chi \bmod m}{}^{*}\ \widetilde{\sum_{|t|\leq T}}\ y^{\beta-1}\Big)$$
$$+ x(L^2P^2T^{-1} + x^2P^2\sigma^{-2}L^2T^{-1}) \ll xP^{-1/3}。 \tag{26}$$

设 $q \leq P$,我们可与 §3.2 的(49) 和(51) 类似地得(注意,这里 $\sigma = \frac{1}{2}q\tau, I(q) = [-(q\tau)^{-1}, (q\tau)^{-1}]$)

$$\int_{I(q)} |F(\chi_q^0, z)|^2 \mathrm{d}z \ll x\Big(\sum_{|t|\leq T}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big)^2 +$$
$$x\Big(\sum_{|t|\leq T}(xT^{-1})^{\beta-1}\Big) + (xT^{-1} + x^3T^{-1}\tau^{-2})L^2$$
$$\ll x((xT^{-1})^{\beta''-1} + T^{-1}P^3)L^2 \ll xP^{-1/3}, \tag{27}$$

这里 $\sum\limits_{|t|\leq T}$ 表示对 $\zeta(s)$ 的所有满足 $\rho = \beta + it$ 和 $|t| \leq T$ 的非平凡零点 ρ 求和,$\beta'' = 1 - \frac{c_{16}}{2L_2}, L_2 = \log(T+2), c_{16}$ 为定理1.5.8 中的常数。由(22)、(23)、(26) 和(27),我们得

$$T_5 \ll xP^{-1/6}L。$$

类似地,我们有

$$T_6, T_7 \ll xP^{-1/6}L。$$

应用 Cauchy 不等式,容易得

$$T_8 \ll L^2\sum_{q\leq P}|\mu(q)|\int_{I(q)}|R(z)|\,\mathrm{d}z$$
$$\ll L^2\sum_{q\leq P}|\mu(q)|\Big(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|R(z)|^2\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot(q\tau)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\ll \Big(\frac{x}{\tau}\Big)^{1/2}P^{1/2}L^2 \ll x^{\frac{1}{3}},$$

$$T_9 \ll L^2 \sum_{q \leqslant P} \theta(q) \mid \tau(\tilde{\chi}\chi_q^0) \mid (\int_{I(q)} \mid \tilde{R}(z) \mid \mathrm{d}z)$$

$$\ll \theta L^2 \cdot \sum_{m\tilde{r} \leqslant P} r^{\frac{1}{2}} (\int_{I(m\tilde{r})} \mid \tilde{R}(z) \mid \mathrm{d}z)$$

$$\ll \theta L^2 r^{1/2} \sum_{m\tilde{r} \leqslant P} (\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mid \tilde{R}(z) \mid^2 \mathrm{d}z)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(m\tilde{r}\tau)^{1/2}}$$

$$\ll \theta L^2 P^{1/2} (\frac{x}{\tau})^{1/2} \ll x^{1/3},$$

$$T_{11} \ll L^4 \sum_{q \leqslant P} \frac{\varphi(q)}{q\tau} \ll L^4 P \tau^{-1} \ll x^{\frac{1}{3}}。$$

对于 T_3,我们看到

$$T_3 = -\sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q)\mu(q)}{\varphi^2(q)} (\sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} e(-\frac{ar}{q}) \tilde{\chi}(a)) \tau(\tilde{\chi}\chi_q^0) \times$$

$$(\int_{I(q)} \overline{T(z)} \cdot \tilde{T}(z) e(-rz) \mathrm{d}z)。$$

由引理 1.1.3,当 $\theta = 1$ 时可得

$$\tilde{T}(z) = \sum_{n \leqslant x} n^{\tilde{\beta}-1} e(nz) = -\int_1^x (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} (\sum_{n \leqslant x} e(nz)) \mathrm{d}u +$$

$$+ x^{\tilde{\beta}-1} (\sum_{n \leqslant x} e(nz))。$$

因此,应用引理 3.3.4(i) 可得

$$\tilde{T}(z) \ll (1 - \tilde{\beta}) \int_1^x u^{\tilde{\beta}-2} \min(u, \frac{1}{\| z \|}) \mathrm{d}u + x^{\tilde{\beta}-1} \min(x, \frac{1}{\| z \|})$$

$$\ll \min(x, \frac{1}{\| z \|})((1 - \tilde{\beta}) \int_1^x u^{\tilde{\beta}-2} \mathrm{d}u + 1)$$

$$\ll \min(x, \frac{1}{\| z \|})。 \tag{28}$$

应用引理 3.3.4 的(i) 可知 $\mid T(z) \mid \ll \min(x, \frac{1}{\| z \|})$。由此及(28) 可得

$$\int_{I(q)} \overline{T(z)} \cdot \tilde{T}(z)\ e(-rz) \mathrm{d}z = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{T(z)} \cdot \tilde{T}(z) e(-rz)$$

$$+ O\left(\int_{1/q\tau}^{\frac{1}{2}} \min\left(x, \frac{1}{\| z \|}\right)^2 \mathrm{d}z\right)$$

$$= \sum_{\substack{m-n=r \\ 1 \leqslant n, m \leqslant x}} m^{\tilde{\beta}-1} + O\left(\int_{1/q\tau}^{\frac{1}{2}} \min\left(x, \frac{1}{z}\right)^2 \mathrm{d}z\right)$$

$$= \sum_{r < m \leqslant x} m^{\tilde{\beta}-1} + O(q\tau)。 \tag{29}$$

因此,若设$(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$为 P - 例外组,则

$$T_3 = -\theta \sum_{\substack{q\tilde{q} \leqslant P \\ (q, \tilde{q}) = 1}} \frac{\mu(q\tilde{q})}{\varphi^2(q\tilde{q})} \tau(\tilde{\chi}\chi^0_{q\tilde{q}}) \left(\sum_{\substack{(a, q\tilde{q}) = 1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q\tilde{q}}} \tilde{\chi}(a) e\left(-\frac{ar}{q\tilde{q}}\right)\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{r < m \leqslant x} m^{\tilde{\beta}-1} + O(q\tau)\right)。 \tag{30}$$

对于 $\theta = 1$,由引理 1.2.3 的(i) 与(iii),我们有

$$\sum_{\substack{(a, q\tilde{q}) = 1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q, \tilde{q}}} \tilde{\chi}(a) e\left(-\frac{ar}{q\tilde{q}}\right) = \sum_{\substack{(x_1, \tilde{q}) = 1 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant \tilde{q}}} \sum_{\substack{(x_2, q) = 1 \\ 1 \leqslant x_2 \leqslant q}} \tilde{\chi}(qx_1 + \tilde{q}x_2) e\left(-\frac{r(qx_1 + \tilde{q}x_2)}{q\tilde{q}}\right)$$

$$= \tilde{\chi}(q) \left(\sum_{\substack{(x_1, \tilde{q}) = 1 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant \tilde{q}}} \tilde{\chi}(x_1) e\left(-\frac{rx_1}{\tilde{q}}\right)\right) \left(\sum_{\substack{(x_2, q) = 1 \\ 1 \leqslant x_2 \leqslant q}} e\left(-\frac{rx_2}{q}\right)\right)$$

$$= \tilde{\chi}(q) \tilde{\chi}(r) \overline{\tau(\tilde{\chi})} c_q(r); \tag{31}$$

其中我们注意到,当 x_1 和 x_2 分别通过模 $\tilde{q}$ 和模 q 的一个缩剩余系时,形如 $qx_1 + \tilde{q}x_2$ 的数通过模 $q\tilde{q}$ 的一个缩剩余系。类似地,由定理 1.2.3 的(i) 与(iii) 可得

$$\tau(\tilde{\chi}\chi^0_{q\tilde{q}}) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q\tilde{q} \\ (a, q\tilde{q}) = 1}} (\tilde{\chi}\chi^0_{q\tilde{q}})(a) e\left(\frac{a}{q\tilde{q}}\right) =$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1\leqslant\tilde{q}\\(x_1,\tilde{q})=1}}\sum_{\substack{1\leqslant x_2\leqslant q\\(x_2,q)=1}}\tilde{\chi}(qx_1+\tilde{q}x_2)\cdot e\left(\frac{qx_1+\tilde{q}x_2}{q\tilde{q}}\right)$$

$$=\tilde{\chi}(q)\Big(\sum_{\substack{1\leqslant x_1\leqslant\tilde{q}\\(x_1,\tilde{q})=1}}\tilde{\chi}(x_1)e\Big(\frac{x_1}{\tilde{q}}\Big)\Big)\Big(\sum_{\substack{1\leqslant x_2\leqslant q\\(x_2,q)=1}}e\Big(\frac{x_2}{q}\Big)\Big)$$

$$=\tilde{\chi}(q)\tau(\tilde{\chi})\mu(q)。\tag{32}$$

由(30)、(31) 和(32),并应用定理 1.2.3 的(ii),可得

$$T_3=-\theta\mu(\tilde{q})\sum_{\substack{\tilde{q}q\leqslant P\\(q,\tilde{q})=1}}|\tau(\tilde{\chi})|^2\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q\tilde{q})}\tilde{\chi}(r)c_q(r)\Big(\sum_{r<m\leqslant x}m^{\tilde{\beta}-1}\Big)$$

$$+O(\Delta),$$

这里(应用引理 2.4.2 的(iii))

$$\Delta=\sum_{q\tilde{q}\leqslant P}\frac{\tilde{q}q^2\tau}{\varphi^2(q)\varphi^2(\tilde{q})}\ll\tau\sum_{q\leqslant P}\frac{q^2}{\varphi^2(q)}\ll\tau P(\log L)^2。$$

由定理 1.2.3 的(ii)、引理 3.3.7 的(ii)、引理 2.2.3 的(ii)、引理 3.3.3 的(iv) 及引理2.3.2的(viii),我们得(注意,$\theta=1$时$\tilde{q}\geqslant3$)

$$\sum_{r\leqslant x-1}\tau_Q(\tau)T_3=-\theta\mu(\tilde{q})\sum_{1<m\leqslant x}m^{\tilde{\beta}-1}\sum_{\substack{\tilde{q}q\leqslant P\\(\tilde{q},q=1)}}\frac{\tilde{q}\,|\mu(q)|}{\varphi^2(q\tilde{q})}$$

$$\times\Big(\sum_{r<m}\tau_Q(r)\tilde{\chi}(r)c_q(r)\Big)+O\Big(\tau P(\log L)^2\sum_{r\leqslant x}\tau(r)\Big)$$

$$=O\Big(\theta Qx(\log L)^2\sum_{q\tilde{q}\leqslant P}\frac{\tilde{q}}{\varphi(\tilde{q})}\cdot\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\Big)+O(\tau P(\log L)^2xL)$$

$$=O\Big(Qx(\log L)^3\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\Big)+O(Qx)$$

$$=O(QxL^{1/2}(\log L)^3)。\tag{33}$$

类似地,我们得

$$\sum_{r \leqslant x-1} \tau_Q(r) T_4 = O(QxL^{1/2}(\log L)^3)。\tag{34}$$

我们有(参见(29))

$$T_2 = \sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2 c_q(r)}{\varphi^2(q)} \left(\int_{I(q)} \mid \widetilde{T}(z) \mid^2 e(-rz) \mathrm{d}z\right)$$

$$= \sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2}{\varphi^2(q)} c_q(r) \left(\sum_{m \leqslant x-r} (m(m+r))^{\tilde{\beta}-1} + O(q\tau)\right)$$

$$= \sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2 c_q(r)}{\varphi^2(q)} \sum_{m \leqslant x-r} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_m^{m+r} (\tilde{\beta}-1) u^{\tilde{\beta}-2} \mathrm{d}u\right.$$

$$\left. + m^{\tilde{\beta}-1}\right) + O\left(\sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) q\tau}{\varphi^2(q)} \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2 \mid c_q(r) \mid\right)。$$

由定理 1.2.3(ii)、$|c_q(r)| \leqslant \varphi(q)$、引理 2.4.2 的(iii)、以及 $\tilde{q} \leqslant P$,可得

$$\frac{\theta(q) q\tau}{\varphi^2(q)} \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2 \mid c_q(r) \mid \ll \frac{q\tilde{q}\tau}{\varphi(q)} \ll L\tilde{q}\tau \ll P\tau L,$$

因此,由引理 2.3.2 的(ii) 及引理 3.3.3 的(iv),我们得

$$\sum_{r \leqslant x} \tau_Q(r) \left(\sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) q\tau}{\varphi^2(q)} \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2 \mid c_q(r) \mid\right) \ll P\tau L \cdot \sum_{r \leqslant x} \tau(r)$$

$$\ll xP\tau L^2 = O(Qx)。$$

于是,设 $y = x - 1$,并交换积分与求和的顺序,可得

$$\sum_{r \leqslant y} \tau_Q(r) T_2 = \sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2}{\varphi^2(q) \times}$$

$$\sum_{m \leqslant y} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{r \leqslant x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \left(\int_m^{m+r} (\tilde{\beta}-1) u^{\tilde{\beta}-2} \mathrm{d}u + m^{\tilde{\beta}-1}\right)\right) + O(Qx)$$

$$= \sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2}{\varphi^2(q)} \left(\sum_{m \leqslant y} m^{\tilde{\beta}-1} \left[\int_m^x (\tilde{\beta}-1) \times\right.\right.$$

$$u^{\tilde{\beta}-2} \left(\sum_{u-m \leqslant r \leqslant x-m} \tau_Q(r) C_q(r)\right) \mathrm{d}u$$

$$\left.\left. + m^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{r \leqslant x-m} \tau_Q(r) c_q(r)\right)\right]\right) + O(Qx)$$

$$= \sum_{q \leqslant P} \frac{\theta(q) \mid \tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0) \mid^2}{\varphi^2(q)} \Big(\sum_{m \leqslant y} m^{\widetilde{\beta}-1} \Big[\int_{m+1}^{x} (\widetilde{\beta} - 1) u^{\widetilde{\beta}-2} \times$$

$$\Big(\sum_{u-m \leqslant r \leqslant x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \Big) \mathrm{d}u$$

$$+ m^{\widetilde{\beta}-1} \Big(\sum_{r \leqslant x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \Big) \Big] \Big) + O(Qx)。 \tag{35}$$

设 $\theta(q) = 1$。用引理 3.3.7 的(i) 去处理(35) 式右边最内侧的求和，得

$$\sum_{u-m \leqslant r \leqslant x-m} \tau_Q(r) c_q(r) = \big[(x - m) \log(\min(x - m, Q)) - (u - m) \log(\min(u - m, Q)) \big] \frac{\varphi(q)}{q} + (x - u) \frac{\varphi(q)}{q} (\gamma - \log q) + O\Big(Q \frac{q^2}{\varphi(q)}\Big),$$

所以，在 $\theta = 1$ 时

$$\frac{q}{\varphi(q)} \sum_{m \leqslant y} m^{\widetilde{\beta}-1} \Big(\int_{m+1}^{x} (\widetilde{\beta} - 1) u^{\widetilde{\beta}-2} \Big(\sum_{u-m \leqslant r \leqslant x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \Big) \mathrm{d}u \Big)$$

$$= \sum_{m \leqslant y} m^{\widetilde{\beta}-1} \Big(\int_{m+1}^{x} (\widetilde{\beta} - 1) u^{\widetilde{\beta}-2} ((x - m)(\log(\min(x - m, Q)) + \gamma - \log q) - (u - m)(\log(\min(u - m, Q)) + \gamma - \log q)) \mathrm{d}u \Big) + O\Big(xO \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + O\Big(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big),$$

这里

$$I_1 = \sum_{m \leqslant x-Q} m^{\widetilde{\beta}-1} \Big(\int_{m+1}^{m+Q} (\widetilde{\beta} - 1) u^{\widetilde{\beta}-2} \big[(x - m)(\log Q + \gamma - \log q) - (u - m)(\log(u - m) + \gamma - \log q) \big] \mathrm{d}u \Big)$$

$$= \sum_{m \leqslant x-Q} (m(m + Q))^{\widetilde{\beta}-1} (x - m - Q)(\log Q + \gamma - \log q)$$

$$-\sum_{m\leqslant x-Q}(m(m+1))^{\tilde{\beta}-1}[(x-m)(\log Q+\gamma-\log q)+\log q-\gamma]+$$

$$\sum_{m\leqslant x-Q}m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+1}^{m+Q}u^{\tilde{\beta}-1}[\log(u-m)+\gamma-\log q+1]\mathrm{d}u),$$

$$I_2=\sum_{m\leqslant x-Q}m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+Q}^{x}(\tilde{\beta}-1)u^{\tilde{\beta}-2}[(x-m)(\log Q+\gamma-\log q)$$

$$-(u-m)(\log Q+\gamma-\log q)]\mathrm{d}u)$$

$$=-\sum_{m\leqslant x-Q}(m(m+Q))^{\tilde{\beta}-1}(x-m-Q)(\log Q+\gamma-\log q)$$

$$+\sum_{m\leqslant x-Q}m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+Q}^{x}u^{\tilde{\beta}-1}(\log Q+\gamma-\log q)\mathrm{d}u)$$

$$I_3=\sum_{x-Q<m\leqslant x-1}m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+1}^{x}(\tilde{\beta}-1)u^{\tilde{\beta}-2}[(x-m)(\log(x-m)+\gamma-$$

$$\log q)-(u-m)(\log(u-m)+\gamma-\log q)]\mathrm{d}u)$$

$$=-\sum_{x-Q<m\leqslant x-1}(m(m+1))^{\tilde{\beta}-1}[(x-m)(\log(x-m)+\gamma$$

$$-\log q)+\log q-\gamma]+\sum_{x-Q<m\leqslant x-1}m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+1}^{x}u^{\tilde{\beta}-1}(\log(u-m)+\gamma$$

$$-\log q+1)\mathrm{d}u),$$

并且,在 $\theta=1$ 时我们有

$$\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{m\leqslant x-1}m^{2\tilde{\beta}-2}(\sum_{r\leqslant x-m}\tau_Q(r)c_q(r))$$

$$=\sum_{m\leqslant x-1}m^{2\tilde{\beta}-2}[(x-m)(\log(\min(x-m,Q))+\gamma-\log q)$$

$$+O(Q\frac{q^3}{\varphi^2(q)})]$$

$$=\sum_{m\leqslant x-Q}m^{2\tilde{\beta}-2}(x-m)(\log Q+\gamma-\log q)$$

$$+\sum_{x-Q<m\leqslant x-1}m^{2\tilde{\beta}-2}(x-m)(\log(x-m)+\gamma-\log q)$$

$$+O(Q\frac{q^3}{\varphi^2(q)})。$$

因此,在 $\theta=1$ 时(注意:许多项互相抵消了)

$$\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{m\leqslant y} m^{\tilde{\beta}-1}\Big[\int_{m+1}^{x}(\tilde{\beta}-1)u^{\tilde{\beta}-2}\Big(\sum_{u-m\leqslant r\leqslant x-m}\tau_Q(r)c_q(r)\Big)\mathrm{d}u$$
$$+\ m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\sum_{r\leqslant x-m}\tau_Q(r)c_q(r)\Big)\Big]$$
$$=\sum_{m\leqslant x-Q} m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+1}^{m+Q}u^{\tilde{\beta}-1}(\log(u-m)+\gamma-\log q+1)\mathrm{d}u\Big)$$
$$+\sum_{m\leqslant x-Q} m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+Q}^{x}u^{\tilde{\beta}-1}(\log Q+\gamma-\log q)\mathrm{d}u\Big)$$
$$+\sum_{x-Q<m\leqslant x-1} m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+1}^{x}u^{\tilde{\beta}-1}(\log(u-m)+\gamma-\log q+1)\mathrm{d}u\Big)$$
$$+\ O\Big(xQ\frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big)$$
$$=\sum_{m\leqslant x-Q} m^{\tilde{\beta}-1}\frac{1}{\tilde{\beta}}\big(x^{\tilde{\beta}}-(m+Q)^{\tilde{\beta}}\big)(\log Q+\gamma-\log q)$$
$$+\sum_{m\leqslant x-Q} m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+1}^{m+Q}u^{\tilde{\beta}-1}\log(u-m)\mathrm{d}u\Big)$$
$$+\sum_{x-Q<m\leqslant x-1} m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+1}^{x}u^{\tilde{\beta}-1}\log(u-m)\mathrm{d}u\Big)+$$
$$O\Big(xQ\frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big)。\tag{36}$$

由(35)及(36),我们得

$$\sum_{r\leqslant x-1}\tau_Q(r)T_2=\theta\sum_{m\leqslant x-Q}\frac{m^{\tilde{\beta}-1}}{\tilde{\beta}}\big(x^{\tilde{\beta}}-(m+Q)^{\tilde{\beta}}\big)\times$$
$$\Big(\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2}{q\varphi(q)}(\log Q+\gamma-\log q)\Big)$$
$$+\ \theta\sum_{m\leqslant x-1} m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+1}^{\min(m+Q,x)}u^{\tilde{\beta}-1}\times$$
$$\log(u-m)\mathrm{d}u\Big)\Big(\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2}{q\varphi(q)}\Big)$$
$$+\ O\Big(xQ\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2q^2}{\varphi^3(q)}\Big)。\tag{37}$$

由(25)、定理 1.2.3 的(ii)、引理 3.3.6 的(iii)、引理 2.4.2 的(iii)与引理 3.2.3,可得

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2}{q\varphi(q)}) = \theta\sum_{\substack{\tilde{q}m\leqslant P\\(m,\tilde{q})=1}}\frac{|\,\mu(m)\,|}{m\varphi(m\tilde{q})}$$

$$= \frac{\theta}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{\substack{m=1\\(m,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{|\,\mu(m)\,|}{m\varphi(m)} + O(\sum_{m>P\tilde{q}^{-1}} m^{-\frac{3}{2}}))$$

$$= \frac{\theta}{\varphi(\tilde{q})}\sum_{\substack{m=1\\(m,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{|\,\mu(q)\,|}{q\varphi(q)} + O(P^{-1/2})。$$

类似地

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2\log q}{q\varphi(q)} =$$

$$\theta\sum_{\substack{\tilde{q}m\leqslant P\\(\tilde{q},m)=1}}\frac{|\,\mu(m)\,|(\log\tilde{q} + \log m)}{m\varphi(m\tilde{q})}$$

$$= \theta\frac{\log\tilde{q}}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{\substack{m=1\\(m,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{|\,\mu(m)\,|}{m\varphi(m)})$$

$$+ \frac{\theta}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{\substack{(m,\tilde{q})=1\\m=1}}^{\infty}\frac{|\,\mu(m)\,|\log m}{m\varphi(m)}) + O(P^{-1/2}),$$

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2}{q\varphi(q)} = \theta\sum_{\substack{\tilde{q}m\leqslant P\\(\tilde{q},m)=1}}\frac{|\,\mu(m)\,|}{m\varphi(m\tilde{q})}$$

$$\leqslant \theta\cdot\frac{1}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{m\geqslant 1}\frac{|\,\mu(m)\,|}{m\varphi(m)}) \ll \theta\tilde{q}^{-1/2},$$

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{\theta(q)\,|\,\tau(\widetilde{\chi}\chi_q^0)\,|^2q^2}{\varphi^3(q)}=\theta\sum_{\substack{\tilde{q}m\leqslant P\\(\tilde{q},m)=1}}\frac{\tilde{q}^3\,|\,\mu(m)\,|\,m^2}{\varphi^3(m\tilde{q})}=$$

$$=\frac{\theta\tilde{q}^3}{\varphi^3(\tilde{q})}\sum_{\substack{\tilde{q}m\leqslant P\\(m,\tilde{q})=1}}\frac{|\,\mu(m)\,|\,m^2}{\varphi^3(m)}$$

$$\ll(\log L)^5\sum_{m\leqslant P}\frac{1}{\varphi(m)}\ll L^{1/2}(\log L)^5。$$

因此，由(37)我们得

$$\sum_{r\leqslant x-1}\tau_Q(r)T_2=\theta\sum_{m\leqslant x-Q}\frac{m^{\tilde{\beta}-1}}{\tilde{\beta}}(x^{\tilde{\beta}}-(m+Q)^{\tilde{\beta}})[C(\tilde{q})(\log Q+\gamma)$$
$$-C_1(\tilde{q})]$$
$$+\theta\cdot C(\tilde{q})(\sum_{m\leqslant x-1}m^{\tilde{\beta}-1}(\int_{m+1}^{\min(m+Q,x)}u^{\tilde{\beta}-1}\log(u-m)\mathrm{d}u)),$$
$$+O(xQL^{1/2}(\log L)^5),\tag{38}$$

此处

$$C(\tilde{q})=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{q=1\\(q,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{|\,\mu(q)\,|}{q\varphi(q)},$$

$$C_1(\tilde{q})=C(\tilde{q})\log\tilde{q}+\frac{1}{\varphi(\tilde{q})}(\sum_{\substack{m=1\\(m,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{|\,\mu(m)\,|\log m}{m\varphi(m)})。$$

对于 T_1，与对 T_2 的处理类似地，我们有

$$T_1=\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}c_q(r)(\int_{I(q)}|\,T(z)\,|^2e(-rz)\mathrm{d}z)$$
$$=\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}c_q(r)(y-r+O(q\tau))$$
$$=\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}c_q(r)(\int_r^y\mathrm{d}u)+O(\tau PL)。$$

因此，交换求和与积分的顺序可得

$$\sum_{r\leqslant y}\tau_Q(r)T_1=\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}\Big(\sum_{r\leqslant y}\tau_Q(r)c_q(r)\Big(\int_r^y \mathrm{d}u\Big)\Big)+O(x\tau PL^2)$$
$$=\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}\Big(\int_1^y\Big(\sum_{r\leqslant u}\tau_Q(r)c_q(r)\Big)\mathrm{d}u\Big)+O(Qx),$$

这里 $y=x-1$，并且我们已应用了 $|c_q(r)|\leqslant\varphi(q)$，引理2.4.2的(iii)及引理2.3.2的(viii)。进一步，由引理3.3.7的(i)，我们得

$$\frac{q}{\varphi(q)}\int_1^y\Big(\sum_{r\leqslant u}\tau_Q(r)c_q(r)\Big)\mathrm{d}u=\int_1^y[(u(\log(\min(u,Q))+\gamma$$
$$-\log q)]\mathrm{d}u+O\Big(xQ\frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big)$$
$$=\int_1^Q u(\log u+\gamma-\log q)\mathrm{d}u$$
$$+\int_Q^y u(\log Q+\gamma-\log q)\mathrm{d}u+Q\Big(xQ\frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big)$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log Q+\gamma-\log q)+O\Big(xQ\frac{q^3}{\varphi^2(q)}\Big)。$$

因此

$$\sum_{r\leqslant y}\tau_Q(r)T_1=\frac{1}{2}x^2(\log Q+\gamma)\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)}-$$
$$\frac{1}{2}x^2\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|\log q}{q\varphi(q)}+O\Big(xQ\sum_{q\leqslant P}\frac{q^2}{\varphi^3(q)}\Big)+O(Qx)。$$

由引理2.4.2的(iii)、引理3.3.6的(iii)、及引理3.2.3，可得

$$\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{|\mu(q)|\log q}{q\varphi(q)}+O\Big(\sum_{q\leqslant P}q^{-3/2}\Big)$$
$$=c_1+O(P^{-1/2}),$$
$$\sum_{q\leqslant P}\frac{|\mu(q)|\log q}{q\varphi(q)}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{|\mu(q)|\log q}{q\varphi(q)}+O\Big(\sum_{q>P}q^{-3/2}\Big)$$
$$=c_2+O(P^{-1/2}),$$
$$\sum_{q\leqslant P}\frac{q^2}{\varphi^3(q)}\ll(\log L)^2\sum_{q\leqslant P}\frac{1}{\varphi(q)}\ll L^{1/2}(\log L)^2,$$

其中 c_1 与 c_2 是由(17)式中给出的常数。于是

$$\sum_{r\leqslant x-1}\tau_Q(r)T_1=\frac{1}{2}x^2(\log Q+\gamma)c_1-\frac{1}{2}c_2x^2+$$

$$O(xQL^{1/2}(\log L)^2)。\tag{39}$$

由前面对于 T_5、T_6、T_7、T_8、T_9 及 T_{11} 的估计，以及引理 2.3.2 的(ii) 和引理 3.3.3 的(iv)，可知

$$\sum_{r\leqslant x-1}\tau_Q(r)\Big(\sum_{\substack{5\leqslant i\leqslant 11\\ i\neq 10}}|T_i|\Big)\ll xL\cdot xP^{-1/2}L\ll Qx。\tag{40}$$

由(17)、(20)、(21)、(33)、(34)、(38)、(39) 和(40)，我们发现(17)式中含 x^2 的项被抵消了，并得

$$S(Q,x)=Qx\log x+2\theta\sum_{m\leqslant x-Q}\frac{1}{\tilde{\beta}}m^{\tilde{\beta}-1}(x^{\tilde{\beta}}-(m+Q)^{\tilde{\beta}})\times(C(\tilde{q})$$

$$(\log Q+\gamma)-C_1(\tilde{q}))+2\theta\cdot C(\tilde{q})\times$$

$$\Big(\sum_{m\leqslant x-1}m^{\tilde{\beta}-1}\Big(\int_{m+1}^{\min(m+Q,x)}u^{\tilde{\beta}-1}\log(u-m)\mathrm{d}u\Big)\Big)+$$

$$O(QxL^{1/2}(\log L)^5)。$$

证毕。

§3.4　一个与 BDH 均值和密切相关的均值和

令

$$T(Q,x)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\Big|\sum_{\substack{(r,q)=1\\1\leqslant r\leqslant q}}e\Big(\frac{ar}{q}\Big)\Big(\sum_{\substack{m\equiv r(\bmod q)\\ n\leqslant x}}\Lambda(n)$$

$$-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(n,q)=1\\ n\leqslant x}}\Lambda(n)\Big)\Big|^2。$$

由 §3.2 的(9)、(10) 两式可知：$T(Q,x)\leqslant S(Q,x)$；并且，从定理 3.2.1 的证明过程来看(见 §3.2 的(12) 的推导)，实际上我们已证明了：若把 $S(Q,x)$ 换成 $T(Q,x)$，则定理 3.2.1 仍成立。我们认为可对 $T(Q,x)$ 建立一个与定理 3.3.1 类似的结果，但具体的处理方法将更加繁琐。

附录一　复分析中的若干基本概念和原理

解析数论之所以被称为解析数论，就是因为有了复分析工具的介入。函数的自变量由实数扩充为复数，就使我们可能容易地处理一些困难的问题。这里我们就将本书中用到的复分析内容加以说明。

(1) 解析函数的定义

复平面上的开连通集简称为域。设 $f(z)$ 为定义在域 Ω 上的一个复值函数$f(z)$ 为域 Ω 上的解析函数，是指对任意的$z_0 \in \Omega$，极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

都存在（即是一个绝对值有限的数；这时把它记为 $f'(z_0)$，并称之为 f 在 z_0 点的导数）。$f(z)$ 在 Ω 上解析，当且仅当对任意的 $z_0 \in \Omega$，$f(z)$ 在 $z = z_0$ 附近都可展成绝对收敛的幂级数，即存在 $r > 0$，使得当$|z - z_0| < r$ 时，$z \in \Omega$ 且

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n。$$

事实上，若 $f(z)$ 在包含于域 Ω 中的某个圆盘$\{z \mid |z - z_0| < R\}$中解析（$R > r$），则它的这个圆盘中都可以展成这个幂级数。

我们说 $f(z)$ 在一个有界闭集 E 上解析，是指 $f(z)$ 在包含 E 的一个域中解析。$f(z)$ 在一点 z_0 处解析，是指存在 z_0 的一个小圆形领域，使得在其中 $f(z)$ 逐点可导。

(2) 线积分的定义

（Ⅰ）Riemann 积分的拓展。设 $f(t) = u(t) + iv(t)$ 为区间$[a, b]$上的一个复值函数，$u(t)$ 与 $v(t)$ 为实连续函数，则我们定

义

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t。$$

（Ⅱ）线积分。设 γ 为复 z 平面上的一段弧，其参数方程为

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), a \leqslant t \leqslant b,$$

$x(t)$ 和 $y(t)$ 都在 $[a,b]$ 上有连续导函数，且 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$。设 $f(z)$ 为定义于 γ 上的一个复值连续函数。简记 $z'(t) = x'(t) + iy'(t), a \leqslant t \leqslant b$。则我们定义

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t,$$

其中等式右边的积分按(Ⅰ)中定义。于是，若令 $f(z(t)) = u(t) + iv(t)$，$u(t)$ 与 $v(t)$ 为 $[a,b]$ 上的连续实函数，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b (u(t)x'(t) - v(t)y'(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b (u(t)y'(t) + v(t)x'(t))\mathrm{d}t。$$

显然，由定义可得

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_a^b |f(z(t))z'(t)|\mathrm{d}t。$$

(3) 解析函数的零点孤立性

设 $f(z)$ 为域 Ω 上的解析函数，$f(z)$ 不恒等于零。设 z_0 为 $f(z)$ 在 Ω 中的一个零点，即 $z_0 \in \Omega$ 且 $f(z_0) = 0$。则存在 $r > 0$，使得当 $|z - z_0| < r$ 时，$z \in \Omega$ 且

$$f(z) = (z - z_0)^h g(z),$$

其中 h 为一个正整数，$g(z)$ 为圆盘 $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ 中的解析函数，且 $g(z_0) \neq 0$。h 称为零点 z_0 的阶。由此容易得到：存在 r_1，$0 < r_1 < r$，使得当 $0 < |z - z_0| < r_1$ 时，$f(z) \neq 0$。这个性质被称零点孤立性。根据零点孤立性和“绝对值有界的复数序列必有收敛子列”，容易导出：一个不恒等于零的有界闭域上的解析函

数,在这个有界闭域的内部仅有有限多个零点。

(4) 解析开拓原理

设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 分别为域 Ω_1 和 Ω_2 上的解析函数,$\Omega_1 \subset \Omega_2$,$\Omega_1 \neq \Omega_2$,且当 $z \in \Omega_1$ 时,$f_1(z) = f_2(z)$,则我们称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 Ω_2 上的解析开拓。这个 $f_2(z)$ 在这种意义上是唯一的,即若 $\Omega_2 \subset \Omega_3$,$\Omega_2 \neq \Omega_3$,且 $f_3(z)$ 为 Ω_3 上的解析函数,$f_1(z) = f_3(z)$ 当 $z \in \Omega_1$ 时成立,则当 $z \in \Omega_2$ 时,必有 $f_2(z) = f_3(z)$。这个原理容易由(3)得到,因为函数 $f_2(z) - f_3(z)$ 在 Ω_1 上为零,若它在 Ω_2 上不恒等于零,则由(3)可知当 $z_0 \in \Omega_1$ 时,应存在 $r > 0$,使得当 $z \in \Omega_1$ 且 $0 < |z - z_0| < r$ 时,$f_2(z) - f_3(z) \neq 0$,但这与 $f_2(z) = f_1(z) = f_3(z)$ 矛盾。

(5) 对数函数 $\log z$ 可定义成为复 z 平面上去掉原点与负实轴后得到的域 Ω 上的解析函数。对于每个复数,z,$z \neq 0$,对数 $\log z$ 可以定义为满足

$$z = e^{\log z}$$

的任何一个值。但是很明显,若 $z = re^{i\theta}$,$r > 0$,$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,则 $\log z$ 可取任何形如

$$\log r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

的值。注意到,$\Omega = \{z \mid z = re^{i\theta}, r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$,因此,若将 z 局限于 Ω 中,并对 $z = re^{i\theta}$,$-\pi < \theta < \pi$,令

$$\log z = \log r + i\theta,$$

则 $\log z$ 成为单值函数,且从 $\log z$ 在 Ω 上连续及 $z = e^{\log z}$,可以证明 $\log z$ 为 Ω 上的解析函数。$\log z$ 当 $z \in \Omega$ 时的这个定义被称为主分支。令 $\Omega_1 = \{z \mid |z| < 1\}$。当 $z \in \Omega_1$ 时,令

$$f(z) = \log(1 + z), F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n-1} z^n,$$

其中对数值取主分支。根据我们的解释,$f(z)$ 为 Ω_1 上的解析函

数。由定义不难证明 $F(z)$ 也为 Ω_1 上解析函数。若 $|x|<1$，x 为实变量，则由 Taylor 展开式容易证明 $f(x)=F(x)$。根据零点孤立性（见(3)），不难证明若 $z\in\Omega_1$，则 $f(z)=F(z)$ 总成立。至于指数函数 e^z，则定义为

$$e^z=1+\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!},$$

这个无穷级数对任何复数 z 都是绝对收敛的。

(6) 极点与残数

若 $f(z)$ 在一个无心圆盘 $\{z \mid 0<|z-z_0|<r\}$ 中解析，且 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$，则称 $f(z)$ 以 z_0 为极点。这时必有

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\neq 0,$$

因为否则将能证明 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，即存在一个在某个小圆 $\{z \mid |z-z_0|<r_1\}$ 中解析的函数 $F(z)$，使得当 $0<|z-z_0|<r_1$ 时，$F(z)=f(z)$，于是 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\lim\limits_{z\to z_0}|F(z)|=|F(z_0)|$ 为一个有限的数，这与假设矛盾。因此，若令

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)}, 0<|z-z_0|<r,\\ 0, z=z_0,\end{cases}$$

则根据定义可验证 $g(z)$ 在 $\Omega=\{z \mid |z-z_0|<r\}$ 中解析，且 $g(z_0)=0$。由(3)中的讨论可知，存在一个在 Ω 中解析的函数 $F(z)$ 及一个正整数 h，使得当 $z\in\Omega$ 时

$$g(z)=(z-z_0)^hF(z),$$

且 $F(z_0)\neq 0$。于是，当 $z\neq z_0, z\in\Omega$ 时，

$$f(z)=(z-z_0)^{-h}G(z),$$

其中 $G(z)=(F(z))^{-1}$，$G(z)$ 为 Ω 上的解析函数。h 称为极点 z_0 的阶数。根据(1)中的说明，当 $z\in\Omega$ 时，

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

且这里的无穷级数是绝对收敛的。相应地，当 $z \in \Omega, z \neq z_0$ 时，我们有

$$f(z) = a_0(z - z_0)^{-h} + \cdots + a_{h-1}(z - z_0)^{-1} + a_h + \sum_{n>h} a_n (z - z_0)^{n-h}。$$

我们称这个表达式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数 a_{h-1} 为 $f(z)$ 在极点 z_0 处的残数，并记为 $\mathrm{Res}_{z=z_0}(f(z))$。我们可以这样解释这个概念，即若设 γ 是以 z_0 为心的半径充分小的圆周，我们取 $f(z)$ 沿 γ 的积分时，可以在 $f(z)$ 的级数表达式中逐项取，则由于（m 是整数）

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (z - z_0)^m \mathrm{d}z = \begin{cases} 1, 若\ m = -1, \\ 0, 否则, \end{cases}$$

我们便得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = a_{h-1}。$$

由 $f(z)$ 的幂级数展开式容易看出

$$a_{h-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) = \frac{1}{(h-1)!}\lim_{z \to z_0}(f(z)(z - z_0)^h)^{(h-1)},$$

这里 $(\cdot)^{(h-1)}$ 表示求 $(h-1)$ 阶导数。

（7）矩形与圆盘的残数定理

设 R 为复平面上的闭矩形区域，函数 $f(z)$ 在 ∂R 上解析，在 R 的内部为亚纯函数，以 $z_1, \cdots, z_n$ 为极点，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i}(f(z)),$$

其中 ∂R 表示 R 的边界（沿反时针方向）。类似的结论当 R 为圆盘时也成立。这个结论的证法，是以每个极点为心做圆形小邻域，然后应用矩形的 Cauchy 定理（即若 $F(z)$ 在 R 上解析，则沿 ∂R 积分为零），注意反向积分的抵消及（6）的解释。

(8) 域中导数恒等于零的解析函数必为常数。域内绝对值等于常数的解析函数也必为常数。

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 为域 Ω 上解析函数,且 $f'(z) = 0$。解析函数的实部与虚部满足所谓的Cauchy-Riemann方程,即 u 与 v 都对 x 与 y 连续可导,且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

这可以根据复变函数导数的定义获得。于是,由 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0$,可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0。$$

由于域中任何两点可用每小段分别平行于两个坐标轴且包含于域中的折线加以联结,而若 $x_0 < x_1$, $u(x_0,y)$ 与 $u(x_1,y)$ 是折线上两个相邻的点,则由实函数的 Cauchy 中值定理可知

$$u(x_0,y) - u(x_1,y) = (x_0 - x_1)\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\xi,y)}\right) = 0,$$

其中实数 ξ 位于区间 (x_0,x_1) 中。所以 $u(x_0,y) = u(x_1,y)$。类似地,若 $u(x,y_0)$ 与 $u(x,y_1)$ 是折线上两个相邻的点,则必有 $u(x,y_0) = u(x,y_1)$。由此可知对域上任两点 (x_0,y_0) 与 (x_1,y_1), $u(x_0,y_0) = u(x_1,y_1)$。关于 $v(x,y)$,也成立同样的结论。于是,对域内两点 z 与 z',必有 $f(z) = f(z')$。即 $f(z)$ 为常数。

若 $|f(z)|$ 为常数,则 $u^2 + v^2$ 为常数。于是 $u^2 + v^2$ 对 x 与 y 求导都为零,即

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0。$$

由此及 Cauchy-Riemann 方程,可知

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

因此当 $u^2+v^2\neq 0$,即 $f(z)$ 不恒等于 0 时,可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

所以 $f(z)$ 必为常数。

(9) 最大模原理

设 $f(z)$ 在有界域 Ω 上解析,$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界,在闭集 $\Omega\cup\partial\Omega$ 上 $f(z)$ 连续,且 $f(z)$ 不恒等于常数,则 $|f(z)|$ 当 $z\in\Omega\cup\partial\Omega$ 时的最大值只能在 $\partial\Omega$ 上取到。首先,复平面有界闭集 $\Omega\cup\partial\Omega$ 上的连续实函数 $|f(z)|$ 必在其中有最大值。但 $|f(z)|$ 的最大值不可能在 Ω 中的任一点 z_0 上取到,否则 $|f(z)|$ 将在 z_0 的一个包含于 Ω 中的小邻域 $\Omega_1=\{z\mid |z-z_0|\leqslant r_0\}$ 中为常数,因而由(8),$f(z)$ 将在 Ω_1 中为常数,再由(3),就可知 $f(z)$ 在 Ω 中(从而在 $\Omega\cup\partial\Omega$ 中)为常数了,这与假设条件矛盾。为说明这一点,可设 $f(z_0)\neq 0$。我们应用(7),得

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta,$$

这里 γ 是圆盘 $\Omega(r)=\{z\mid |z-z_0|=r\}$,$r$ 是任意一个使得 $\Omega(r)\subseteq\Omega$ 的正数。若 $|f(z_0)|$ 是最大值,则一方面对每个 θ 都有 $|f(z_0)|\geqslant|f(z_0+re^{i\theta})|$,另一方面,由 $f(z_0)$ 的积分表达式可得

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta。$$

若有一个 $\theta_0\in[0,2\pi]$,使得 $|f(z_0+re^{i\theta_0})|<|f(z_0)|$,则由连续性可知存在 $\delta>0$,使得当 $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时,

$$|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0+re^{i\theta_0})|<\frac{1}{2}(|f(z_0)|-|f(z_0+re^{i\theta_0})|)。$$

于是,当 $|\theta-\theta_0|<\delta$ 时,

$$|f(z_0+re^{i\theta})|<\frac{1}{2}(|f(z_0)|+|f(z_0+re^{i\theta_0})|)=\lambda。$$

设

$$E_1 = \{\theta \mid \theta \in [0,2\pi], |\theta - \theta_0| \geqslant \delta\},$$

$$E_2 = \{\theta \mid \theta \in [0,2\pi], |\theta - \theta_0| < \delta\},$$

则集合 E_1 和 E_2 都由有限个区间构成,且当 $\theta \in E_1$ 时

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| \leqslant |f(z_0)|,$$

当 $\theta \in E_2$ 时,

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < \lambda < |f(z_0)|。$$

于是,若用 $\mu(E_1)$ 与 $\mu(E_2)$ 分别表示 E_1 与 E_2 的 Lebesgue 测度,我们看到(注意:$\mu(E_2) \geqslant \delta > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{E_1} + \int_{E_2}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}(|f(z_0)|\mu(E_1) + \lambda\mu(E_2))\\ &< \frac{1}{2\pi}(|f(z_0)|(\mu(E_1) + \mu(E_2)) = |f(z_0)|,\end{aligned}$$

这是一个矛盾。它说明 $|f(z_0 + re^{i\theta})| = |f(z_0)|$ 对每个 $\theta \in [0, 2\pi]$ 都成立。由于 r 是使得 $\Omega(r) \subseteq \Omega$ 的任意正数,可知 $|f(z)|$ 在一个包含于 Ω 中的小邻域 $\{z \mid |z - z_0| \leqslant r_0\}$ 上都为 $|f(z_0)|$。根据前面的解释,这说明 $f(z)$ 在 Ω 上为常数。这个矛盾就说明了 $f(z)$ 的最大值只能在边界 $\partial\Omega$ 上的点取到。

附录二　解析数论中的求和与交换求和

解析数论中大量的内容都是在与求和打交道。这里我们就本书中出现的涉及求和的一些原则加以说明。

(1) 一变量求和

我们在下面的表述中,通常把一个正整变量局限于取值在某

个有限区间 I 中,并且“x 有 P”表示正整变量 x 具有某种特殊的性质 P。设 $f(x)$ 为任一个随 x 而变的函数,则

$$\sum_{\substack{x\in I\\ x\text{有}P}} f(x)$$

就表示将所有属于 I 且具有性质 P 的不同的正整变量 x 所对应的值 $f(x)$ 加起来求和。这里须指出的是,若 $x_1 \neq x_2$,却可能 $f(x_1)=f(x_2)$。

(2) 二变量求和的交换求和

设 I_1 为一个有限闭区间,$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为 I_1 上的严格单调连续实函数,且当 $x\in I_1$ 时,$a\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant b$,$a$ 与 b 为有限的数,$a\leqslant b$。P_1 与 P_2 分别表示两种性质,$f(x_1,x_2)$ 表示与二个正整变量 x_1 与 x_2 有关的复值函数,$x_1\in I_1$,$a\leqslant x_2\leqslant b$。则我们有

$$\sum_{\substack{x\in I_1\\ x_1\text{有}P_1}} \sum_{\substack{f_1(x_1)\leqslant x_2\leqslant f_2(x_1)\\ x_2\text{有}P_2}} f(x_1,x_2) = \sum_{\substack{X_1\leqslant x_2\leqslant X_2\\ x_2\text{有}P_2}} \sum_{\substack{f_1(x_1)\leqslant x_2\leqslant f_2(x_1)\\ x_1\text{有}P_1\text{且}x_1\in I_1}} f(x_1,x_2),$$

其中 $X_1=\min\limits_{x_1\in I_1}(f_1(x_1))$,$x_2=\max\limits_{x_1\in I_1}(f_1(x_1))$。为了证明这个等式,我们只需引进辅助函数

$$g(x_1,x_2)=\begin{cases}1,\text{若 } f_1(x_1)\leqslant x_2\leqslant f_2(x_1),\\ 0,\text{否则},\end{cases}$$

然后将它与 $f(x_1,x_2)$ 相乘,从而容易看出交换求和是许可的。并且,我们进一步指出,对每个满足“$X_1\leqslant x_2\leqslant X_2$,$x_2$ 有 P_2”的正整数 x_2,满足“$f_1(x_1)\leqslant x_2\leqslant f_1(x_2)$ 且 $x_1\in I_1$”的实变量 x_1 是由一个区间构成的(可能为空集)。对此,我们分几种情况讨论。

(Ⅰ) 满足条件 $f(x_1)\leqslant x_2$ 且 $x_1\in I_1$ 的实变量 x_1 由一个闭区间构成。

(a) 若 $X_1\leqslant x_2\leqslant \max\limits_{x\in I_1}(f_1(x_1))$,则由连续函数的性质可知存

在 $\xi \in I_1$，使得 $x_2 = f_1(\xi)$。于是，按 f_1 是严格单调增或严格单调降的，条件“$f_1(x_1) \leqslant x_2, x_1 \in I_1$”分别等价于“$a \leqslant x_1 \leqslant \xi$”或“$b \geqslant x_1 \geqslant \xi$”。

(b) 若 $X_2 \geqslant x_2 \geqslant \max\limits_{x \in I_1}(f_1(x))$，则“$f_1(x_1) \leqslant x_2, x_1 \in I_1$”等价于“$x_1 \in I_1$”。

(Ⅱ) 利用 $f_2(x)$ 是 I_1 上严格单调连续函数的条件，可与(Ⅰ)类似地证明：满足条件“$f_2(x_1) \geqslant x_2, x_1 \in I_1$”的实变量 x_1 由一个闭区间组成。

(Ⅲ) 由于两个闭区间之交或为空集，或为一个闭区间，而满足“$f_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant f_2(x_1)$ 且 $x_1 \in I_1$”的实变量 x_1 的全体的集合是交集

$$\{x_1 \in I_1 \mid f_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant X_2\} \cap \{x_1 \in I_1 \mid X_1 \leqslant x_2 \leqslant f_2(x_1)\},$$

所以，由(Ⅰ)与(Ⅱ)可知，满足“$f_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant f_2(x_1)$ 且 $x_1 \in I_1$”的实变量 x_1 的全体为包含于 I_1 中的一个区间。由此，我们能够将二变量求和中求和的先后顺序加以互换。当 $f_1(x_1) \equiv a$ 或 $f_2(x_1) \equiv b$ 时，可用类似的方法证明这种求和顺序的互换仍是许可的。若 $f_1(x_1) \equiv a, f_2(x_1) \equiv b$，则显然求和的顺序可以互换。注意，“$x_2$ 有 P_2”可以是 x_2 满足一个不等式“$Y_1 \leqslant x_2 \leqslant Y_2$”。

(3) 求和与积分的交换顺序

设 n 代表正整数，I 为一个闭区间，$f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 为两个 I 上单调函数，$b \geqslant f_2(n) \geqslant f_1(n) \geqslant a$，$a$ 与 b 为有限数，对每个 $n \in I$，实函数 $F(n,u)$ 都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。P 代表一种性质。则

$$\sum_{\substack{n \in I \\ n有P}} \int_{f_1(n)}^{f_2(n)} F(n,u)\,\mathrm{d}u = \int_{u_1}^{u_2} \Bigl(\sum_{\substack{f_1(n) \leqslant u \leqslant f_2(n) \\ n \in I且n有P}} F(n,u) \Bigr) \mathrm{d}u,$$

其中 $u_1 = \min\limits_{n \in I}(f_1(n))$，$u_2 = \max\limits_{n \in I}(f_2(n))$。为证这个等式，对每个

$n\in I$,定义

$$\lambda_n(u)=\begin{cases}1,\text{若 } u\in[f_1(n),f_2(n)],\\0,\text{若 } u\in[u_1,u_2],u\notin[f_1(n),f_2(n)]。\end{cases}$$

显然,$\lambda_n(u)$ 为$[u_1,u_2]$上的有界变差函数。因此,由书中引理 3.3.4 可知 $\lambda_n(u)$ 在$[u_1,u_2]$上 Riemann 可积。由于 $F(n,u)$ 在$[a,b]$的任何部分区间上都可积,所以

$$\sum_{\substack{n\in I\\ n\text{有}P}}\int_{f_1(n)}^{f_2(n)}F(n,u)\mathrm{d}u=\sum_{\substack{n\in I\\ n\text{有}P}}\int_{u_1}^{u_2}\lambda_n(u)F(n,u)\mathrm{d}u$$

$$=\sum_{\substack{n\in I\\ n\text{有}P}}\lim_{M\to\infty}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant M}f_n(\xi_i)\Delta x_i\Big)=\lim_{M\to\infty}\Big(\sum_{\substack{n\in I\\ n\text{有}P}}\sum_{1\leqslant i\leqslant M}f_n(\xi_i)\Delta x_i\Big)$$

$$=\lim_{M\to\infty}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant M}\Big(\sum_{\substack{n\in I\\ n\text{有}P}}f_n\Big)(\xi_i)\Delta x_i\Big)=\int_{u_1}^{u_2}\Big(\sum_{\substack{n\in I\\ n\text{有}P}}\lambda_n(u)F(n,u)\Big)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{u_1}^{u_2}\Big(\sum_{\substack{n\in I\text{且}n\text{有}P\\ f_1(n)\leqslant u\leqslant f_2(n)}}F(n,u)\Big)\mathrm{d}u;$$

其中我们简记 $f_n(u)=\lambda_n(F)(n,u)$,并对任意大正整数 M,取了区间$[u_1,u_2]$的 M 等分:

$$u_1=x_0<x_1<\cdots<x_{M+1}=u_2,$$

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\frac{u_2-u_1}{M},$$

而 ξ_i 为区间$[x_i,x_{i+1}]$中任取的一个数。这里我们注意,有限求和与求极限总是可以交换的。当 $F(n,u)$ 为复函数时,若设

$$F(n,u)=X(n,u)+iY(n,u),$$

$X(n,u)$ 与 $Y(n,u)$ 都是$[a,b]$上 Riemann 可积的函数,则按照**附录一**的(2)的(Ⅰ)中的定义,可证明类似的求和与积分的交换仍然合理。

(4) 多重求和的一个基本原则

在多重求和时,先对较大的变量求和,仅在对较大变量的求

和行不通时，才先对较小的变量求和。

(5) 无限的情形

若求和的区间为无限的，或积分的上、下为无限，则我们可以用有限加以逼近。确切地说，当求和的限制为 $a \leqslant x < +\infty$，则我们可以先求 $\sum\limits_{a \leqslant x \leqslant N}$，然后令 $N \to +\infty$。积分的处理也类似。当然，用求极限的方法从有限过渡到无限，也是数学分析的出发点。

附录三　对 Hooley 2000 年一文的注记

令

$$S(Q,x) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \Bigg(\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a (\bmod q)}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \Big(\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} \Lambda(n) \Big) \Bigg)^2,$$

$$\widetilde{S}(Q,x) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a \leqslant q}} \Bigg(\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a (\bmod q)}} \Lambda(n) - \frac{x}{\varphi(q)} \Bigg)^2,$$

其中 $\Lambda(n)$ 与 $\varphi(q)$ 分别为 von Mangoldt 函数与 Euler 函数。早在 1995 年，在论文[L3] 中，我就能够在

$$x \geqslant Q \geqslant x \exp\left(-\frac{c \log x}{\log \log x}\right) \tag{1}$$

这个 Q 的变化范围内(其中 c 为一适当小的可计算的正的常数)求出均值和 $S(Q,x)$ 的阶为 $Qx\log x$ 的下界估计(参见本书 §3.2)，而采用 Hooley 发表于 2000 年的论文[H7] 中的方法，则无论对 $S(Q,x)$ 还是 $\widetilde{S}(Q,x)$，都顶多只能在

$$x \geqslant Q \geqslant x \exp(-(\log x)^{3/5-\varepsilon}) \tag{2}$$

(ε 为任小正常数) 中才能获得阶为 $Qx\log x$ 的下界估计，这是由于 Hooley 的方法必须用到素数定理。显然，范围(1) 比范围(2) 大。因此，在这个意义上，我的结果仍未被超越。

在我的新文章[L6]中(又见本书 §3.3),我则在

$$x \geqslant Q \geqslant x\exp(-\lambda(\log x)^{1/2}) \tag{3}$$

时可获得 $S(Q,x)$(以及 $\widetilde{S}(Q,x)$)的渐近展开式(λ 为某正的常数),由此既可获得 $S(Q,x)$ 精密的下界,又可知 $S(Q,x)$ 的上界是与 L - 函数的"例外零点"紧密相关的,而 Hooley 的方法在范围(2)中则只能给出 $S(Q,x)$ 的下界。

(Hooley 文[H7]p.66 上 Lemma 2)的证明有误,事实上由 p.65 上关于 $\sum_{x,R}^{(1)} = \sum_{n\leqslant x}(x-n)\Lambda_R^2(n)$ 的渐近公式并不能经 Tauberian 讨论直接导出 Lemma 2,因为当 $y < x$ 时 $R < 2y\exp(-\log^{3/5} y)$ 未必成立,不过采用 pp.62 ~ 65 上的类似方法,似乎可以用围道积分方法直接证明 Lemma 2).

参考文献

[A] AHLFORS L V. 复分析[M].2nd ed. 张立,张靖,译,上海:上海科技出版社,1984.

[B] BARBAN M B. The large sieve method and its applications in the theory of numbers[J].Russian Math. Surv,1996(21):49-103.

[CP] 陈景润,潘承洞. Goldbach 数的例外集合[J].中国科学,1980(3):219-232.

[D] DAVENPORT H, Multiplicative Number Theory[M]. 2nd ed. Berlin:Springer, 1980.

[DH] DAVENPORT H,Halberstam H. Primes in arithmetic progressions[J].Michigan Math,1966(13):485-489.

[FG] FRIEDLANEDER J B, GOLDSTON D A, Variance of distribution of primes in residue classes[J].Quart. Math. (Oxford Second Series),1996(47):313-336.

[G1] GALLAGHER P X. The large sieve[J].Mathematika, 1967(14):14-20.

[G2] GALLAGHER P X. A large sieve density estimate near $\sigma = 1$[J]. Invent. Math. 1970(11):329-339.

[H1] HOOLEY C.On the Barban-Davenport-Halberstam theorem.I[J]. reine angew. Math. 1975(274/275):206-223.

[H2] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. VIII [J]. reine angew. Math. 1998(499):1-46.

[H3] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. IX [J]. Acta Arith., 1998(83):17-30.

[H4] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. X [J]. Hardy-Ramanujan Journal, 1998(21):2-11.

[H5] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XI [J]. Acta Arith., 1999(91):1-41.

[H6] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XII [J]. Number Theory in Progress, Zakopane, Poland-1997, Walter de Gruyter, Berlin, 1999:893-910.

[H7] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XIII [J]. Acta Arith.,2000(94):53-86.

[H8] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XIV [J]. Acta Arith., 2002(101):247-292.

[H9] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XV [J]. Acta Arith., 2004(111):205-224.

[H10] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XVI [C]//Max-Planck-Institute in Bonn, 2002, Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Reinisch Friedrich-Wilhelms-Universitat.

[H11] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XVII [C]//Max-Planck-Institute in Bonn, 2002, Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Reinisch Friedrich-Wilhelms-Universitat.

[H12] HOOLEY C. On theorems of Barban-Davenport-Halberstam type, Number theory for the Millennium [C]// AK Peters Natik, Mass. 2002(2):195-228.

[H] 华罗庚.数论导引[M]. 2nd ed.北京:科学出版社,1979.

[J] JUTILA M. On Linnik's constant[J]. Math. Scand, 1977(41):45-62.

[K] A A 卡拉楚巴.解析数论基础[M].潘承彪,张南岳,译.北京:科学出版社,1984.

[L1] 刘弘泉.关于 $v(n)$ 及 $\varphi(n)$ 的两个渐近公式[J].中国科学技术大学学报,1987(17):98-104.

[L2] LIU H Q. Lower bounds for sums of Barban-Davenport-Halberstam type[J]. reine angew. Math, 1993(438):163-174.

[L3] LIU H Q. Lower bounds for sums of Barban-Davenport-Halberstam type (supplement)[J]. Manuscripta Math, 1995(87):159-166.

[L4] LIU H Q. On an average sum[J]. Harbin Institute of Technology, New Series, 1999 6(1):14-18.

[L5] LIU H Q. Remarks on the Lower bound for suns of the BDH type [J]. ibid, 2006(3)13:333-336.

[L6] LIU H Q. Barban-Davenport-Halberstam average sum and exceptional zero of L-functions[J]. Number Theory, 2008(128):1011-1043.

[M] 闵嗣鹤.数论的方法[M].北京:科学出版社,1981,1983.

[Mn] MONTGOMERY H L. Primes in arithmetic progressions[J]. Michigan Math. 1970(17):33-39.

[MV] MONTGOMERY H L, VAAUGHAN R C. The exceptional set in Goldbach's problem[J]. Acta Arith, 1975(27):353-370.

[Mo] MOTOHASHI Y. Lectures on sieve methods and the prime number theory[M]. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1983.

[OCJ] 欧维义,陈维钧,金德俊.高等数学(第三册)[M].长春:吉林大学出版社,1987.

[PP] 潘承洞,潘承彪.解析数论基础[M].北京:科学出版社,1991.

[T] TITCHMARSH E C. The theory of the Riemann zeta-function[M]. 2nd ed. London: Oxford, 1986.

[Tu] TURÁN P.数学分析中一个新方法及其在数论中的应用[J]. 郭焕庭,译.数学进展,1955.

[V1] VAUGHAN R C. The Hardy-Littlewood method[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[V2] Vaughan R C. On a variance associated with the distribution of primes in arithmetic progressions[J]. London Math. 2001(82): 533-553.